UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
INSTITUTO DE MATEMATICAS

ALGEBRA DE MATRICES

Ing. MARIO RAUL AZOCAR
(Master of Science - New York University - New York City)

1973

UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

INSTITUTO DE MATEMATICAS

ALGEBRA DE MATRICES

Para mi muy apreciado amigo Sergio Calaciati

Ing. MARIO RAUL AZOCAR

(Master of Science - New York University - New York City)

Cordialmente

M. R. Azócar

1973

P R O L O G O

El Instituto de Matemática de la Universidad Católica de Chile, consciente de su compromiso con la comunidad, ha programado una serie de publicaciones destinadas a contribuir a la mejor preparación de sus estudiantes.

Estas notas sobre Algebra de Matrices, corresponden a parte del curso MAT 154 - Algebra II, que el Instituto ofrece principalmente para estudiantes de Ingeniería y por ello han sido redactadas interpretando este espíritu.

Si esta labor académica resulta de algún beneficio para nuestros estudiantes, el suscrito considerará valorizado con creces el tiempo empleado en redactarlas.

Ing. MARIO RAUL AZOCAR

ALGEBRA DE MATRICES

1.- MATRICES

La matriz es una noción que corrientemente se define sobre un cuerpo conmutativo cualquiera, o sea sobre un campo. Considerando que en las aplicaciones se trabaja más frecuentemente con el campo de los reales R y con el campo de los complejos C, nuestro estudio se realizará fundamentalmente sobre estos campos, sin que esto signifique la imposibilidad de externder nuestros resultados sobre otros cuerpos conmutativos.

DEF 1.1.

Llamaremos matriz de orden mxn sobre el cuerpo de los complejos C, al conjunto de mxn números: $a_{ij} \in C$ dispuestos en m renglones y n columnas.

Designando con a_{ij} el número ubicado en el renglón de orden i y en la columna de orden j de una matriz A, tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

expresión que para simplicidad en la escritura, denotaremos brevemente por $A = (a_{ij})$. Los números a_{ij} que forman la matriz A, se llaman elementos de A.

Cuando $m = n$, la matriz A se dice matriz cuadrada de orden n. En el caso particular en que $m = n = 1$, la matriz está formada por un sólo elemento, el a_{11}, y en tal caso anticipamos que $(a_{ij}) \neq a_{11}$.

DEF 1.2.

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo orden se dirán iguales si y sólo si: $a_{ij} = b_{ij}$.

De esta definición resulta inmediato que la igualdad matricial, es refleja, simétrica y transitiva.

DEF 1.3.

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden mxn, se llama:

a) Matriz opuesta de ella, a la matriz de orden mxn:

$$- A = - (a_{ij}) = (-a_{ij})$$

b) Matriz transpuesta de ella, a la matriz $A^t = (a^t_{ij})$ de orden nxm, donde $a^t_{ij} = a_{ji}$

c) Matriz conjugada de ella, a la matriz de orden mxn:

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}}) = (\overline{a}_{ij})$$

d) Matriz transconjugada de ella, a la matriz $A^* = (a^*_{ij})$

de orden nxm, donde: $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$

<u>TEOREMA</u> 1.1.

a) $-(-A) = A$ c) $\overline{(\bar{A})} = A$

b) $(A^t)^t = A$ d) $(A^*)^* = A$

<u>Dm</u>

Por ser muy simple, solo veremos un caso:

$$(A^*)^* = (a^*_{ij})^* = (\bar{a}_{ji})^* = (a_{ij}) = A$$

<u>DEF</u> 1.4.

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es simétrica si y sólo si: $a_{ij} = a_{ji}$. Ella es antisimétrica sii: $a_{ij} = -a_{ji}$.

<u>TEOREMA</u> 1.2.

Una matriz A es simétrica si y sólo si: $A = A^t$.

<u>Dm</u>

Si A es simétrica, ella es cuadrada, y como además: $a_{ij} = a_{ji}$, resulta:

$$A^t = (a^t_{ij}) = (a_{ji}) = (a_{ij}) = A$$

Recíprocamente si $A = A^t$, el número de renglones es igual al número de columnas y entonces la matriz es cuadrada. Además $A = A^t$ implica $a_{ij} = a^t_{ij} = a_{ji}$, luego A es simétrica.

<u>TEOREMA</u> 1.3.

La matriz A es antisimétrica sii: $A = -A^t$.

Dm

Se deja como ejercicio, por ser análoga a la dada en el teorema precedente.

DEF 1.5.

Matriz unidad es toda matriz cuadrada $I = (\delta_{ij})$, donde δ_{ij} es el δ de Kronecker

DEF. 1.6.

Matriz nula, es toda matriz O cuyos elementos son todos ceros.

2.- SUMA DE MATRICES

En este párrafo definiremos dos operaciones matrices: la suma de matrices y el producto de una matriz por un escalar.

DEF 2.1.

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo orden mxn, llamaremos suma de ellas a una matriz $A + B$ que por definición valdrá: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

TEOREMA 2.1.

Sean A, B, C y O matrices del mismo orden mxn, entonces:

a) $A + B = B + A$ c) $A + O = A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ d) $A + (-A) = 0$

Dm

Trivial, se deja como ejercicio.

TEOREMA 2.2.

Sean A y B matrices del mismo orden, entonces:

a) $-(A + B) = (-A) + (-B)$ c) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $\overline{(A + B)} = \overline{A} + \overline{B}$ d) $(A + B)^* = A^* + B^*$

Dm

Trivial. Solo daremos el caso (c)

$$
\begin{aligned}
(A + B)^t &= (a_{ij} + b_{ij})^t \\
&= (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) \\
&= (a^t_{ij}) + (b^t_{ij}) = A^t + B^t
\end{aligned}
$$

DEF 2.2.

El producto de una matriz $A = (a_{ij})$ por un escalar p, es una matriz del mismo orden de A, que designaremos con la notación: pA ó Ap y que por definición valdrá:

$$pA = Ap = (pa_{ij})$$

Observación

De acuerdo a las definiciones 1.3 y 2.2 conviene notar que: $-A = (-1)A$.

<u>TEOREMA</u> 2.3.

Sean A y B matrices del mismo orden; p y q escalares, entonces:

a) $p(A + B) = pA + pB$ c) $(pq)A = p(qA) = q(pA)$

b) $(p + q)A = pA + qA$ d) $pA = 0$ sii $p = 0$ ó $A = 0$

<u>Dm</u>

Trivial, se deja como ejercicio.

<u>DEF</u> 2.3.

Dadas dos matrices A y B del mismo orden, llamaremos diferencia entre A y B a una matriz que designaremos con A - B y que por definición valdrá: $A - B = A + (-B)$

<u>TEOREMA</u> 2.4.

Toda matriz cuadrada A puede expresarse, de manera única, como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

<u>Dm</u>

Sea S una matriz simétrica ($S= S^t$) y T una matriz antisimétrica ($T = -T^t$), por determinar; y tales que: $A = S + T$. Entonces: $A^t = (S + T)^t = S^t + T^t = S - T$. Resolviendo el sistema para S y T, resulta:

$$S = \frac{1}{2}(A + A^t) \qquad T = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

Así tenemos:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$

Finalmente esta descomposición es única, pues el sistema que determina S y T es de primer grado, con determinante no nulo.

Corolario

Para toda matriz cuadrada A se tiene que: $S = A + A^t$ es simétrica y $T = A - A^t$ es antisimétrica.

EJERCICIOS

1. Con E (x) designamos el mayor entero que no es mayor que x. Construya las matrices siguientes:

   a) $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = E(j/i)$ y de orden 4x5

   b) $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = E((i+1)/(j+2))$ de orden 3x4

   c) $C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = E(j)$ y de orden 3x3

   d) $D = (d_{ij})$ con $d_{ij} = E(j\delta_{ij})$ y de orden 4x4

2. Resolver las ecuaciones:

   a) $5X + I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$ b) $2X - 3I = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   c) $3(X + 5I_2) = 2(X - I_2)$

   d) $2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \wedge X - 3Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

3. Demuestre que las matrices A, B y C que se indican son linealmente dependientes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Descomponga la matriz A en suma de una simétrica S y otra antisimétrica T. Tome A arbitraria, cuadrada y de orden 3x3.

5. Determine si las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden 4x4 con $a_{ij} = E(ij)$ y $b_{ij} = (-1)^{ij}(i + j)$ son o no simétricas.

6. Sea V el espacio de las matrices de orden 2x2 sobre el cuerpo C. Se toma $H \subset V$, siendo: $H = \{A | A \in V \wedge A = A^*\}$ Determine si H es o no subespacio de V.

3.- <u>PRODUCTO DE MATRICES</u>

El producto de matrices difiere fundamentalmente del producto de números reales o complejos, por dos razones principales: primero, las matrices factores deben cumplir ciertas condiciones para que pueda existir su producto y segundo, el producto que definiremos no es conmutativo en general.

<u>DEF</u> 3.1.

Una matriz A será multiplicable por una matriz B cuando el número de columnas de A sea iagual al número de renglones de B.

<u>Observación</u>

En general, si A es multiplicable por B, no necesariamente B es multiplicable por A.

<u>DEF</u> 3.2.

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ multiplicable por una matriz $B = (b_{ij})$, llamaremos producto escalar del renglón de orden i de A, por la columna de orden j de B, al número:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{in}\, b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

<u>DEF</u> 3.3.

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ multiplicable por una matriz $B = (b_{ij})$, llamaremos producto de A por B, a una matriz que designaremos con AB y que por definición valdrá:

$$AB = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\right)$$

<u>Observación</u>

De acuerdo a esta definición, el producto de una matriz A de orden (mxn) y una matriz B de orden (nxp) es una matriz C = AB de orden (mxp). Como consecuencia inmedianta de esta observación se concluye que si A de orden (mxn) es multiplicable con B de orden (nxp), el producto de B por A no está definido, a menos que: p = m.

Además de esta característica, hay otras diferencias notables entre el producto de matrices y el producto en álgebra clásica. Veamos dos que son de fundamental importancia.

1° Aún cuando existan los productos AB y BA, no siempre ocurre que: AB = BA. El ejemplo siguiente, ilustra esta aseveración.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Este ejemplo es suficiente para afirmar que el producto de matrices no es conmutativo. Debido a esta circunstancia, corrientemente se llama al producto AB, posmultiplicación de A por B o bien premultiplicación de B por A.

2° El producto de dos matrices puede ser la matriz nula, aún cuando ninguno de los factores sea nulo. El ejemplo siguiente corrobora esta afirmación.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

TEOREMA 3.1.

Sea A una matriz de orden mxn, entonces:

$$AI_n = I_m A = A$$

Dm

$$AI_n = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \delta_{kj}) = (a_{ij}\, \delta_{jj}) = (a_{ij}) = A$$

$$I_m A = (\sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\, a_{kj}) = (\delta_{ii}\, a_{ij}) = (a_{ij}) = A$$

TEOREMA 3.2.

a). $(\overline{AB}) = \overline{A}\ \overline{B}$ b). $(AB)^t = B^t A^t$

c). $(AB)^* = B^* A^*$

Dm

a) Esta igualdad por demostrar, sólo exige que A sea multiplicable por B, en tal hipótesis tenemos:

$$AB = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj})$$

$$\overline{AB} = \overline{(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj})} = (\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}\, b_{kj}})$$

$$\overline{AB} = (\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{ik}\, \overline{b}_{kj}) = \overline{A}\ \overline{B}$$

b) Si A y B son matrices cuadradas de orden n, tenemos:

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\right) = (p_{ij})$$

$$(AB)^t = (p^t_{ij}) = (p_{ji}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki}\right) \qquad (1)$$

Por otra parte:

$$B^t\, A^t = \left(\sum_{k=1}^{n} b^t_{ik}\, a^t_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}\, a_{jk}\right) \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) tenemos: $(AB)^t = B^t\, A^t$

c) Aquí tal como en el caso (b), A y B deben ser matrices cuadradas del mismo orden, entonces:

$$(AB)^* = \overline{(AB)}^t = \overline{(B^t\, A^t)} = \bar{B}^t\, \bar{A}^t = B^*\, A^*$$

<u>Corolario</u>

Para toda matriz A, ocurre que $P = AA^t$ y $Q = A^t\, A$ son matrices simétricas. En efecto:

$$P^t = (AA^t)^t = (A^t)^t\, A^t = AA^t = P$$

<u>TEOREMA</u> 3.3.

$$(pA)\ (qB) = pq(AB) = (qA)\ (pB)$$

<u>Dm</u>

Sea $A = (a_{ij})$ multiplicable por $B = (b_{ij})$, entonces por definición de producto de matrices tenemos:

$$(pA)\ (qB) = \left(\sum_{k=1}^{n} (p\ a_{ik})\ (q\ b_{kj})\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} (pq)a_{ik}\ b_{kj}\right)$$

$$= pq\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ b_{kj}\right) = (pq)(AB)$$

Finalmente: $(pA)\ (qB) = pq\ (AB) = qp\ (AB) = (qA)(pB)$

Corolario

$$(-A)B = A(-B) = -(AB) \quad y \quad (-A)(-B) = AB$$

TEOREMA 3.4.

$$(AB)C = A(BC)$$

Dm

Naturalmente que en la proposición por demostrar, suponemos que los productos indicados existen. Sea entonces A de orden mxp, B de orden pxq y C de orden qxn.

El elemento del renglón de orden h y de la columna de orden i del producto AB es:

$$x_{hi} = \sum_{j=1}^{p} a_{hj}\ b_{ji}$$

luego el elemento del renglón de orden h y de la columna de orden k del producto (AB)C es:

$$Y_{hk} = \sum_{i=1}^{q} x_{hi}\ c_{ik} = \sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{hj}\ b_{ji}\right)\ c_{ik}$$

$$Y_{hk} = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{hj}\, b_{ji}\, c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} a_{hj}\, b_{ji}\, c_{ik}$$

$$Y_{hk} = \sum_{j=1}^{p} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{q} b_{ji}\, c_{ik} \right)$$

esta última igualdad muestra que Y_{hk} es el elemento del renglón de orden h y de la columna de orden k del producto A(BC), de aquí entonces que: (AB)C = A(BC).

TEOREMA 3.5.

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

Dm

Obviamente, nuestro enunciado supone que las operaciones contenidas en él, son posibles. Sea entonces A de orden mxn, B y C de orden nxp.

El elemento del renglón de orden i y de la columna de orden k de la matriz B + C es: $s_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$.

Por lo tanto el elemento del renglón de orden h y de la columna de orden k de la matriz: A(B + C) será:

$$x_{hk} = \sum_{i=1}^{n} a_{hi}\, s_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{hi}\, (b_{ik} + c_{ik})$$

$$x_{hk} = \sum_{i=1}^{n} a_{hi}\ b_{ik} + \sum_{i=1}^{n} a_{hi}\ c_{ik}$$

pero estas últimas sumatorias son los elementos del renglón de orden h y de la columna de orden k de las matrices AB y AC respectivamente, luego: $A(B + C) = AB + AC$.

Analogamente se demuestra que: $(B + C)A = BA + CA$.

DEF 3.4.

Para toda matriz cuadrada **A**, y n natural tomaremos:

$A^0 = I$ $\qquad$ $A^1 = A$ $\qquad$ $A^{n+1} = A^n\ A$

TEOREMA 3.6.

Si k y n son enteros no negativos y A matriz cuadrada, se tiene:

$$A^n\ A^k = A^{n+k}$$

Dm

Se hará por inducción. Para $k = 1$, las tesis es válida, en efecto: $A^n\ A^1 = A^n\ A = A^{n+1}$

Supongamos entonces que la igualdad propuesta es válida para $k = p$. O sea, que: $A^n\ A^p = A^{n+p}$.

En esta hipótesis tenemos:

$$A^n\ A^{p+1} = A^n(A^pA) = (A^nA^p)A = A^{n+p}\ A = A^{n+p+1} = A^{n+(p+1)}$$

resultado que demuestra la tésis propuesta.

Corolario

Si n es entero positivo, se tiene: $(A^n)^t = (A^t)^n$

En efecto:

$$(A^n)^t = (AAA\ldots\ldots A)^t = A^t \ldots\ldots A^t A^t A^t = (A^t)^n$$

DEF 3.5.

Una matriz cuadrada $A \neq 0$ se dice nulpotente si existe un entero positivo p, tal que: $A^p = 0$

Una matriz cuadrada $A \neq 0$ se dice periódica, si existe un entero positivo p tal que: $A^{p+1} = A$.

El menor entero p que verifique la igualdad precedente se dirá período de la matriz. Particularmente si $A^2 = A$, la matriz se dice idempotente.

EJERCICIOS

1. Efectúe los productos que se indican y saque en cada caso una conclusión:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ^ $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}^2$

2. Demuestre que: $(A + B)^2 = A^2 + B^2$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Determine todas las matrices X de orden 2 x 2 tales que

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Resuelva la ecuación $\quad X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = I_2$

5. Resuelva la ecuación $\quad X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = I_2$ y aproveche

la solución encontrada para resolver la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Si X es matriz no nula de orden 2 x 2, resuelva la

ecuación $\quad X \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

7. Exprese matricialmente los sitemas:

a)
$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2y + z &= 5 \\ 2z + 3x &= 12 \end{aligned}$$

8. Exprese matricialmente, mediante matrices simétricas, las cuádricas que se indican:

a) $x^2 + 6y^2 + 10z^2 + 4xy + 6xz + 10yz = 5$

b) $x^2 + 5y^2 - z^2 + 3xy - 2yz = 0$

c) $8x^2 + 11y^2 + 8z^2 - 4xy + 4yz + 8xz = -9$

9. Verifique que la ecuación: $x^3 - x^2 - 5x + 5I = 0$

admite la solución $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Si $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, demuestre que: $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \operatorname{sen} n\alpha \\ -\operatorname{sen} n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

11. Si $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{n}$, demuestre que:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ -\frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \operatorname{sen} n\alpha \\ -\operatorname{sen} n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

12. Calcule $\begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}^n$ ^ $\begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}^n$

13. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcule:

A^{4n} , A^{4n+1} , A^{4n+2} , A^{4n+3}

14. Determine todas las matrices cuadradas X de segundo orden tales que $X^2 = I$

15. Idem para $X^2 = O$

16. Calcule A^{100} siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.- MATRIZ RECIPROCA

DEF 4.1

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, la matriz adjunta de ella es la matriz $A^+ = (a^+_{ij})^t$, donde a^+_{ij} es el adjunto del elemento a_{ij} en el determinante $|A| = \det(A)$.

TEOREMA 4.1.

$$AA^+ = A^+ A = |A| \, I$$

Dm

La demostración de esta tésis resulta muy simple si se tiene presente que, en un determinante la suma de los productos de los elementos de una línea (renglón o columna), por sus adjuntos correspondientes, es igual al determinante y la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de los elementos de una línea paralela es cero; o sea, recordando que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a^{+}_{ik} = \det\ (A) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a^{+}_{jk} = 0$$

o bien, resumiendo las dos expresiones en una sola, tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a^{+}_{jk} = \delta_{ij} \det\ (A)$$

Teniendo presente las igualdades anteriores, resulta:

$$AA^{+} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ (a^{+}_{kj})^{t}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ a^{+}_{jk}\right)$$

$$= (\delta_{ij} \det\ (A)) = (\delta_{ij}) \det A = I \det\ (A)$$

De análoga manera se obtiene:

$$A^{+} A = \left(\sum_{k=1}^{n} (a^{+}_{ik})^{t}\ a_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a^{+}_{ki}\ a_{kj}\right)$$

$$= (\delta_{ij} \det\ (A)) = (\delta_{ij}) \det\ (A) = I \det(A)$$

Así hemos demostrado que: $AA^{+} = A^{+}A = I \det\ (A)$

DEF 4.2

Dada una matriz cuadrada A, llamaremos matriz recíproca de ella, toda matriz B, siempre que exista, tal que: $AB = BA = I$

TEOREMA 4.2.

Si A tiene matriz recíproca, ésta es única.

Dm

Supongamos que la matriz cuadrada A, admita dos matrices recíprocas P y Q, entonces:

$PA = AP = I$ y $QA = AQ = I$

luego: $P = PI = P(AQ) = (PA)Q = IQ = Q$

La matriz recíproca de una matriz A, se designará por A^{-1}.

DEF 4.3

Llamaremos matriz regular, (no singular), toda matriz cuadrada A, que tenga matriz recíproca. Toda matriz cuadrada no regular se dirá singular.

TEOREMA 4.3.

Una matriz cuadrada A tiene matriz recíproca si y sólo si: $|A| = \det(A) \neq 0$. Además:

$$A^{-1} = \frac{A^+}{|A|} = \frac{A^+}{\det(A)}$$

Dm

Supongamos que $|A| \neq 0$. De $AA^+ = A^+ A = |A|\, I$ obtenemos:

$$A \frac{A^+}{|A|} = \frac{A^+}{|A|} A = I$$

resultado que nos muestra que A es regular y además que la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{A^{+}}{|A|} \quad \text{con} \quad |A| \neq 0.$$

Recíprocamente supongamos que A es matriz regular. Llamando B a su matriz recíproca; tenemos: $AB = BA = I$, luego:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$$

de donde, obviamente: $\det(A) \neq 0$.

<u>Corolario</u> 1

Si A y B son matrices regulares de orden n, la matriz AB también es regular.

En efecto, $|AB| = |A|\ |B|$ y puesto que $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$, resulta $|AB| \neq 0$.

<u>Corolario</u> 2

Si A es regular, también lo es A^{-1} y además,

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

En efecto: $AA^{-1} = I$ implica $|A||A^{-1}| = 1$

<u>Corolario</u> 3

Si A de orden n es no singular (regular)

$$\det(A^{+}) = |A^{+}| = |A|^{n-1}$$

En efecto de: $AA^{+} = |A|\ I = (|A|\delta_{ij})$, resulta:

$$\det(AA^{+}) = \det(|A|\delta_{ij}) = |A|^{n}$$

Corolario 4

Si A de orden n es no singular, se tiene:

$$(A^{+})^{+} = |A|^{n-2}\, A$$

TEOREMA 4.4.

Sean A y B matrices regulares, entonces:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$ b) $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

c) $(AB)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}$

Dm

a) Como A es regular, también lo es A^{-1}, luego existe $(A^{-1})^{-1}$ y entonces: $A^{-1}\,(A^{-1})^{-1} = I$, de aquí premultiplicando por A, resulta: $(A^{-1})^{-1} = A$

b) Tomando transpuesto en la igualdad $AA^{-1} = I$, se obtiene: $(A^{-1})^{t}\, A^{t} = I^{t} = I$

y posmultiplicando por $(A^{t})^{-1}$, resulta: $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$

c) Tenemos:

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$

y como además: $(AB)(AB)^{-1} = I$, resulta: $(AB)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}$

Corolario

$$(AB)^{+} = B^{+}\, A^{+}$$

Terminaremos estas ideas extendiendo la definición de potencia de una matriz cuadrada, a potencias de exponente entero negativo de una matriz regular.

DEF. 4.4

Si A es matriz regular y n es un entero positivo:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

Finalmente presentaremos las llamadas matrices: involutiva, ortogonal, unitaria, hermítica y antihermítica.

DEF 4.5

Una matriz cuadrada regular A, es:

a) Involutiva, si y sólo si: $A^{-1} = A$

b) Ortogonal, si y sólo si: $A^{-1} = A^t$

c) Unitaria, si y sólo si: $A^{-1} = A^*$

d) Hermítica, si y sól- si: $A = A^*$

e) Antihermítica, si y sólo si: $A = -A^*$

EJERCICIOS

1.- Determine la matriz adjunta A^+ de $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2. Sea A matriz no singular de orden n, demuestre que:

$$(A^+)^+ = A(\det A)^{n-2} \quad \wedge \quad \det (A^+)^+ = (\det A)^{(n-1)^2}$$

3.- Se A matriz simétrica de orden n, demuestre que A^+ es simétrica para n impar y antisimétrica para n par.

4.- Determine la matriz inversa o recíproca de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.- Usando algebra de matrices resuelva los sistemas:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 9x - 10y + z &= 1 \\ 3x + y - z &= -1 \\ 7x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

6.- Usando cualquier procedimiento, resolver:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 3 \\ x + 5y - z &= 3 \\ 7x + 9y - z &= 15 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 16x - 84y + 40z &= 62 \\ 2x + 7y - 3z &= 7 \\ 18x - 7y + 5z &= 4 \end{aligned}$$

7.- Determine las tres raices cuúbicas de 1. Si una raiz compleja es ω, demuestre que la otra es ω^2 y que $1 + \omega + \omega^2 = 0$

8.- Determine la matriz recíproca de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$

9.- Sea $\omega^3 = 1$ y $\omega \neq 1$, demuestre que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix} = 3I$$

10.- Sea A matriz cuadrada de orden n sobre C. Demuestre que A se puede expresar de manera única en la forma $A = H + K$, siendo $H = H^*$ y $K = -K^*$

11.- Demuestre que $A^{-n} = (A^n)^{-1}$ y calcule A^{-n} para

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix}$$

12.- Determinar la matriz A, sabiendo que:

$$A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 9/4 \\ 9/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t + A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 17/4 \\ 5/6 & 0 \end{pmatrix}$$

13.- Calcular $S = A^{-1} + A^{-2} + A^{-3} + \ldots + A^{-n}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

14.- Resolver la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

15.- La matriz A, cuadrada de orden n, verifica la ecuación $A^2 = O$. Demuestre que la matriz $A + I$ admite una recíproca de la forma $x\,A + I$. Determine x.

16.- Determinar las matrices X e Y que verifican el sistema

$X + AY^t = B \qquad X^t + YC = D,$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

17.- Sea A matriz cuadrada de orden n, Y sea $M = \{A \mid AA^t = I\}$. Demuestre que M con el producto de matrices, es grupo.

18.- El número real a es fijo y x es real variable. Demuestre que el conjunto de matrices de la forma:

$$M(x) = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene estructura de grupo respecto a la multiplicación.

19.- Calcular la matriz $S = \binom{n}{1} A^2 + \binom{n}{2} A^4 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} A^{2n}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y n número natural.

20.- Sea A matriz cuadrada de orden n, demuestre que A es regular si y solo si el sistema $AX = 0$, admite unicamente la solución trivial.

21.- Sea A matriz ortogonal $(A^t = A^{-1})$, demuestre que:

a) $\det A^2 = 1$ b) A^{-1} es ortogonal c) A^t es ort.

5.- RANGO DE UNA MATRIZ

La idea de rango de una matriz es de fundamental importancia en varios tópicos referentes a matrices y en especial en el estudio de los sistemas lineales.

DEF 5.1.

En una matriz A de orden m x n, el rango-renglón es el mayor número de vectores-renglones linealmente independientes.

DEF 5.2.

En una matriz A de orden m x n, el rango-columna es el mayor número de vectores-columnas linealmente independientes.

TEOREMA 5.1.

En cada matriz A, el rango-renglón: rr(A) y el rango-columna: rc(A), son iguales.

Dm

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cualquiera, de orden m x n. Si A es matriz nula, el teorema es trivial. Supongamos entonces que $A \neq 0$.

Sean $R_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n})$, $R_2 = (a_{21}, a_{22} \ldots a_{2n})$ ......
.....$R_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots a_{mn})$ los renglones de A. Supongamos

que el rango-renglón de A es r, y que los r vectores-renglones linealmente independientes son los siguientes:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \ldots b_{1n}), \; S_2 = (b_{21}, b_{22} \ldots b_{2n})$$
$$\ldots\ldots\ S_r = (b_{r1}, b_{r2}, \ldots b_{rn})$$

De acuerdo a estas ideas, cada vector-renglón R_i, debe ser combinación lineal de los vectores-renglones, linealmente independientes S_j con $j = 1, 2, 3, \ldots. r$. Así tenemos:

$$\begin{aligned} R_1 &= c_{11}S_1 + c_{12}S_2 + \ldots + c_{1r}S_r \\ R_2 &= c_{21}S_1 + c_{22}S_2 + \ldots + c_{2r}S_r \\ &\text{------------------------} \\ R_m &= c_{m1}S_1 + c_{m2}S_2 + \ldots + c_{mr}S_r \end{aligned}$$

Si en cada una de estas ecuaciones, igualamos la componente de orden i, tenemos:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= c_{11}b_{1i} + c_{12}b_{2i} + \ldots + c_{1r}b_{ri} \\ a_{2i} &= c_{21}b_{1i} + c_{22}b_{2i} + \ldots + c_{2r}b_{ri} \\ &\text{------------------------} \\ a_{mi} &= c_{m1}b_{1i} + c_{m2}b_{2i} + \ldots + c_{mr}b_{ri} \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Así entonces:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m2} \end{pmatrix} + \dots + b_{ri} \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{mr} \end{pmatrix}$$

igualdad que nos muestra que cada uno de los vectores-columnas de A, es combinación lineal de los r vectores, $C_1, C_2, \dots C_r$, siendo $C_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots c_{mj})^t$. De aquí entonces que el rango-columna de A no es mayor que el renglón r. Llamando k al rango-columna tenemos: $k \leq r$.

Razonando de análoga manera con las columnas se obtendría $r \leq k$, y entonces concluímos: $r = k$.

DEF 5.3.

El rango de una matriz A, es el número:

$$r(A) = rr(A) = rc(A)$$

DEF 5.4.

En una matriz A de orden m x n, se llama menor de orden k, todo determinante formado por k renglones y k columnas de la matriz A.

TEOREMA 5.2.

Una matriz no nula A, tiene rango k, si y solo si, uno al menos de sus menores de orden k, es diferente de cero y todos los menores de orden superior a k son nulos.

Dm

La demostración no se dará. Puede consultarse, entre otros, el texto: "A First Course in Linear Algebra", del profesor D. Zelinsky, página 155. Academic Press-1968.

Corolario

Si A es matriz cuadrada, no singular, de orden n, su rango es n.

DEF 5.5.

La nulidad de una matriz cuadrada A de orden n, es el número (n-r), siendo r = rango (A).

Observación

La determinación del rango de una matriz es de importancia primordial. La búsqueda del rango de una matriz, puede hacerse en forma muy cómoda, introduciendo ciertas operaciones que pueden efectuarse sobre una matriz y que se conocen con el nombre de transformaciones elementales.

DEF 5.6.

Dada una matriz A, llamaremos transformaciones elementales a:

1.- Intercambio del renglón de orden i por el renglón de orden j: (H_{ij}).

Intercambio de la columna de orden i por la columna de orden j: (V_{ij}).

2.- Multiplicar un renglón de orden i por un escalar, no nulo, p: (pH_i)

Multiplicar una columna de orden i por un escalar, no nulo, p: (pV_i).

3.- Sumar al renglón de orden i, el renglón de orden j, previamente multiplicado por el escalar p: $(H_i + pH_j)$.

Sumar a la columna de orden i, la columna de orden j, previamente multiplicada por el escalar p: $(V_i + pV_j)$.

TEOREMA 5.3.

El rango de una matriz es invariante bajo las transformaciones elementales.

Dm

Trivial. Se deja como ejercicio.

Observación

El teorema precedente establece la invarianza del rango de una matriz, con respecto a las transformacio nes elementales que sobre ella se efectúan. Esta idea, conjuntamente con el teorema 5.2, proporcionan un método expedito para determinar el rango de cualquier matriz. Justificaremos esta afirmación proporcionando un ejemplo.

Ejercicio

Determinar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 11 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & -1 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Sol: Determinaremos el rango pedido, efectuando sobre la matriz A, transformaciones elementales-columnas. Sumando a la cuarta columna la segunda previamente multiplicada por 2 y restando a la quinta la segunda, resulta:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 11 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Restando a la última columna la primera y restando a la tercera la suma de la segunda más la primera previamente multiplicada por 3, tenemos la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora como las columnas primera y segunda son linealmente independientes, tenemos rango (C) = 2. Finalmente como las transformaciones elementales no alteran el rango de una matriz, resulta: rango (A) = rango (B) = rango (C) = 2.

Obtenida la matriz C, también puede concluirse que rango (C) = 2, haciendo uso del teorema 5.2, pues tenemos

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

y además, todo determinante de orden superior a dos, es nulo.

<u>DEF</u> 5.7.

Se llama matriz elemental, toda matriz que puede obtenerse efectuando, un número finito de transformaciones elementales, sobre una matriz unidad.

<u>TEOREMA</u> 5.4.

Toda matriz elemental es no singular

<u>Dm</u>

Sea A una matriz elemental de orden n. Como ella puede obtenerse por transformaciones elementales desde la matriz unidad de orden n, ella debe tener rango n. Ahora para que A tenga rango n, como A es cuadrada de orden n, debe tenerse det (A) $\neq$ 0. Así, A es matriz no singular.

TEOREMA 5.5.

Cada transformación elemental-renglón sobre una matriz A, puede obtenerse premultiplicando A, por una matriz elemental.

Dm

Para simplicidad de escritura, tomemos una matriz A de tercer orden y efectuemos las siguientes transformaciones-renglones:

a) Permutación del primer renglón con el segundo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

b) Multiplicación del tercer renglón por un escalar p, no nulo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ pa_{31} & pa_{32} & pa_{33} \end{pmatrix}$$

c) Sumar al primer renglón el tercero previamente multiplicado por un escalar p.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + pa_{31} & a_{12} + pa_{32} & a_{13} + pa_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Observación

Sin duda que lo presentado como demostración del teorema precedente, no es propiamente una demostración, sino un simple ejemplo aplicado a matrices de tercer orden. Nos justificamos diciendo que ello se hizo en beneficio de la claridad del contexto.

Para obviar esta situación rogamos al lector, tomar matrices de orden n y en lugar de hablar de primer, segundo o tercer renglón, use la terminología renglón de orden i, de orden j, ó de orden k; entonces creemos quedará eliminada toda inquietud.

TEOREMA 5.6.

Cada transformación elemental-columna sobre una matriz A, puede obtenerse posmultiplicando A, por una matriz elemental.

Dm

Idéntica a la dada en el teorema anterior.

TEOREMA 5.7.

Si una matriz cuadrada no singular A, se reduce a la matriz unidad I, mediante premultiplicaciones por las matrices elementales M_1, M_2, M_3,......, M_k, la matriz recíproca A^{-1} de A, se obtiene premultiplicando I por dichas matrices.

<u>Dm</u>

Por hipótesis tenemos que:

$$M_k \, M_{k-1} \cdots\cdots M_3 \, M_2 \, M_1 \, A = I$$

Ahora como A es no singular, existe A^{-1}. Posmultiplicando la igualdad anterior por A^{-1}, resulta:

$$M_k \, M_{k-1} \cdots\cdots M_3 \, M_2 \, M_1 \, I = A^{-1}$$

conclusión que demuestra la tésis.

<u>Observación</u>

El teorema precedente nos proporciona un procedimiento muy práctico para determinar la matriz recíproca A^{-1}, de una matriz no singular A. En efecto, de acuerdo a lo demostrado en el teorema anterior, para obtener A^{-1}, bastará efectuar sobre la matriz unidad I, las mismas transformaciones-renglones que son necesarias para reducir A a I.

Aclaremos estas ideas con un ejemplo, indicando en él, un adecuado esquema de cálculos.

<u>Ejercicio</u>

Determinar la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como esquema de cálculo dispondremos las matrices A e I en la forma (A | I) y mediante transformaciones-renglones, que operarán simultáneamente sobre A e I, trataremos de reducirlas a la forma (I | B). Entonces, de acuerdo al teorema 5.7. tendremos $B = A^{-1}$

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \frac{\underline{H_1 + H_3}}{H_2 + H_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \underline{H_1 + 2H_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \frac{\underline{H_2 + 2H_1}}{H_3 - 2H_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -5 \end{array}\right) = (I \mid A^{-1})$$

Sin dificultad, por simple multiplicación matricial puede comprobarse que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 5.7.

Si una matriz cuadrada no singular A, se reduce a la matriz unidad I, mediante posmultiplicaciones por las matrices elementales N_1, N_2, N_3, ..., N_j, la matriz recíproca A^{-1} de A, se obtiene posmultiplicando I por dichas matrices.

Dm

Identica a la dada en el teorema anterior, se deja como ejercicio.

Observación

Este teorema, tal como el anterior, proporciona un medio para determinar la matriz recíproca A^{-1}, de una matriz no singular A, operando con transformaciones-columnas.

EJERCICIOS

1.- Verifique que para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Se tiene: $r(A + B) < r(A) + r(B)$

2.- Determinar el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 13 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -8 & 2 & 11 & 7 & -3 \\ -1 & 10 & 3 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

3.- Verifique que para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se tiene: $r\,(A + B) = r\,(A) + r\,(B)$

4.- Sean A y B matrices del mismo orden $m \times n$, demuestre que:

a) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$

b) $r(A + B) \geq |r(A) - r(B)|$

5.- Sea A matriz de orden $m \times n$ sobre el cuerpo de los complejos. Demuestre que: $r(A) = r(A^t) = r\,(\bar{A}) = r(A^*)$

6.- Sea A matriz de orden $m \times n$ sobre R. Sea P de orden $m \times m$ y Q de orden Q de orden $n \times n$, ambas no singulares.

Demuestre que: $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$

7.- Sea A matriz no-singular de orden n, multiplicable por la matriz B.

Demuestre que: $r(AB) = r(BA) = r(B)$

8.- Determine dos matrices A y B tales que: $r(AB) = \text{mín}\,\{r(A), r(B)\}$

9.- Determine dos matrices A y B, tales que:

$$r(AB) < \min \{r(A), r(B)\}$$

10.- Sea A matriz multiplicable por B, demuestre que:

$$r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}.$$

11.- Sean $a_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $b_j \neq 0$ para $j = 1, 2, 3, \ldots n$. Demuestre que el rango de la matriz $X = (a_i b_j)$, es uno.

6.- EQUIVALENCIA, CONGRUENCIA Y SIMILITUD DE MATRICES

DEF 6.1.

Una matriz A de orden $m \times n$ es equivalente a una matriz B de orden $m \times n$, si y sólo si, existen matrices no singulares, P de orden m y Q de orden n, tales que:

$$A = P\,B\,Q$$

Para indicar que A es equivalente con B pondremos: $A \sim B$

TEOREMA 6.1.

La equivalencia de matrices es una relación de equivalencia.

Dm

Para establecer la tesis debemos probar que la equivalencia de matrices es refleja, simétrica y transitiva. Si

A es de orden $m \times n$, tomando $P = I_m$ y $Q = I_n$, resulta:

$$I_m\, A\, I_n = (I_m\, A)\, I_n = A\, I_n = A$$

lo que nos indica que $A \sim A$. Ahora si A es equivalente con B, $(A \sim B)$ tenemos:

$A = P\, B\, Q$ y como P y Q son no singulares resulta:

$B = P^{-1}\, A\, Q^{-1}$; igualdad que nos muestra que B es equivalente con A, o sea $(B \sim A)$.

Finalmente supongamos que A es equivalente con B y que B es equivalente con C, entonces tenemos: $A = P\, B\, Q$ y $B = R\, C\, S$ de donde:

$$A = P\ (RCS)Q = (PR)\ C\ (SQ)$$

y como las matrices (PR) y (SQ) son no singulares, vemos que la equivalencia es transitiva, o sea: $A \sim B$ y $B \sim C$, implica $A \sim C$.

<u>TEOREMA</u> 6.2.

La matriz A es equivalente con B, si y sólo si, A puede obtenerse desde B por un número finito de transformaciones elementales.

<u>Dm</u>

Supongamos que A es equivalente con B, entonces:

$A = P\ B\ Q$. Ahora como P y Q son no singulares, ellas pueden obtenerse desde matrices unidades, mediante transformaciones elementales, o sea:

$$M_k\ M_{k-1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ M_3\ M_2\ M_1\ I_m = P$$

$$I_n\ N_1\ N_2\ N_3\ \ldots\ldots\ldots\ N_{j-1}\ N_j = Q$$

Reemplazando estas expresiones en $A = P\ B\ Q$, queda:

$$A = M_k\ M_{k-1}\ \ldots\ldots\ M_2\ M_1\ B\ N_1\ N_2\ \ldots\ldots\ N_{j-1}\ N_j$$

lo que nos indica que A puede obtenerse desde B por transformaciones elementales.

La proposición recíproca es inmediata

TEOREMA 6.3.

Dos matrices A y B del mismo orden, son equivalentes, si y sólo si,tienen el mismo rango.

Dm

Si A y B son equivalentes, una cualquiera de ellas puede obtenerse desde la otra, por transformaciones elementales y como el rango es invariante a dichas transformaciones, se concluye que A y B tienen el mismo rango.

La proposición recíproca la dejamos al lector.

Terminaremos estas ideas presentando las nociones de congruencia y similitud de matrices.

DEF 6.2.

Dadas dos matrices A y B de orden n, A es congruente con B, si y sólo si existe una matriz regular P, tal que:

$$A = P\ B\ P^t.$$

De esta definición resulta inmediato que la congruencia de matrices es un caso particular de equivalencia, pues A congruente con B, ($A \simeq B$), implica:

$$A = P\ B\ Q \qquad \text{con} \qquad Q = P^t$$

De aquí entonces que:

a). La congruencia es una relación de equivalencia.

b). Si A es congruente con B, ($A \simeq B$), A puede obtenerse desde B, mediante un número finito de transformaciones elementales.

c). Dos matrices A y B congruentes, tienen el mismo rango.

La congruencia de matrices es de importancia básica en el estudio de las formas cuadráticas y de las formas bilineales.

Finalmente definiremos otro caso particular de equivalencia ($A = P\ B\ Q$), la similitud, que se obtiene tomando $Q = P^{-1}$.

DEF 6.3.

Dadas dos matrices A y B de orden n, A es similar con B, si y sólo si, existe una matriz no singular P, tal que: $A = P\ A\ P^{-1}$.

Considerando que la similitud de matrices es un caso particular de equivalencia de matrices, podemos afirmar que:

a). La similitud de matrices es una relación de equivalencia.

b). Si A es similar con B, ($A \simeq B$), A puede obtenerse desde B, mediante un número finito de transformaciones elementales.

c). Dos matrices A y B similares, tienen el mismo rango.

7.- ECUACIONES LINEALES

DEF 7.1.

Se llama ecuación lineal para las incógnitas $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, sobre un cuerpo K, toda ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

de donde $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ y b son elementos del campo K.

Los elementos a_i son los coeficientes de las incógnitas x_i, y b es el término constante. Particularmente si el término constante b, es el elemento nulo del cuerpo K, la ecuación lineal toma la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_nx_n = 0$$

y pasa a llamarse ecuación lineal homogénea.

DEF 7.2.

Una solución de la ecuación lineal (1) es todo conjunto $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$ de elementos del cuerpo K, tales que: $a_1\ \alpha_1 + a_2\ \alpha_2 + \ldots\ldots + a_n\ \alpha_n = b$

DEF 7.3.

Un sistema lineal de m ecuaciones para las incógnitas: $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, sobre un cuerpo K, es todo conjunto de m ecuaciones de la forma:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \hline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (2)$$

Particularmente si: $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots\ldots b_m = 0$ el sistema (2) es lineal homogéneo.

DEF 7.4.

Es solución del sistema (2) todo conjunto $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$ de elementos de K, que sea solución de cada una de las ecuaciones del sistema.

Si el sistema (2) admite por lo menos una solución, él es compatible; si no admite ninguna solución, es imcompatible.

Un sistema compatible es determinado si admite una solución única, contrariamente si admite maś de una solución, él es indeterminado.

<u>Sistema Lineal</u>
- **a) Compatible**
  - **1) Determinado**
  - **2) Indeterminado**
- **b) Incompatible**

Un sistema homogéneo es siempre compatible, pues el conjunto (0,0, ..., 0) de elementos de K, es solución. Esta solución, se llama solución trivial del sistema y cualquiera otra solución se dirá, no trivial.

<u>DEF</u> 7.5.

Se llama matriz del sistema (2) a la matriz A = (a_{ij}) de orden m × n, formada por los coeficientes de las incógnitas.

<u>DEF</u> 7.6.

Se llama matriz ampliada del sistema, (2) a la matriz:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Introduciendo las matrices columnas:

$\xi = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)^t$ y $\beta = (b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n)^t$

el sistema (2) se expresa matricialmente por: $A\xi = \beta$ (3).

Observación

A continuación, nos preocupamos del problema fundamental en el estudio de los sistemas lineales. Este problema consiste esencialmente en: Dado un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, determinar en qué condiciones es compatible y en cuáles es incompatible, además, en el primer caso tratar de obtener todas las soluciones.

Consideramos inicialmente el caso más simple, en que el número de ecuaciones (m) es igual al número de incógnitas (n). Un sistema tal, lo llamaremos sistema de Cramer.

TEOREMA 7.1.

Un sistema lineal $A\,\xi = \beta$ de n ecuaciones con n incógnitas y con matriz no singular ($|A| \neq 0$), es compatible y determinado.

Dm

Como A es matriz no singular, existe la matriz recíproca A^{-1}. Premultiplicando la ecuación dada: $A\xi = \beta$ por A^{-1}, tenemos: $\xi = A^{-1}\beta$ y como A^{-1} es única para cada matriz no singular dada A, queda probado que el sistema $A\xi = \beta$, tiene solución única, o sea él es compatible y determiando.

Corolario 1

Si el sistema homogéneo $A\xi = \theta$, tiene matriz regular, su única solución es la solución trivial.

Observación

La solución que hemos encontrado para el sistema $A\xi = \beta$, tiene una expresión simple y muy cómoda en las consideraciones teóricas referentes a sistemas lineales. Para presentarla tomaremos la definición siguiente:

DEF 7.7.

Dado el sistema $A\xi = \beta$, se llama matriz de la incógnita x_i, a la matriz cuadrada A_i que se obtiene de reemplazar en la matriz A del sistema la columna de los coeficientes de x_i por la columna de los términos conocidos b_j.

Corolario 2

Si el sistema de Cramer $A\xi = \beta$ tiene matriz no singular, su solución está dada por:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \ \ldots\ldots \ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Observación

Estudiados los sistemas de Cramer, podemos pasar a considerar los sistemas lineales de m ecuaciones con n incógnitas. Al respecto, el teorema fundamental que veremos a continuación es conocido bajo el nombre de teorema de Rouché-Frobenius-Capelli.

TEOREMA 7.2.

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema lineal $A\xi = \beta$ sea compatible, es que el rango de la matriz A del sistema, sea igual al rango de la matriz ampliada $\tilde{A}$.

Dm

Si el sistema $A\xi = \beta$ es compatible, admite por lo menos una solución: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, y entonces tenemos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Esta igualdad nos indica que la columna de las b_j de la matriz ampliada $\tilde{A}$ es combinación lineal de las n columnas precedentes de ella; así las matrices A y $\tilde{A}$ tienen igual rango.

Recíprocamente, haremos ver que si las matrices A y $\tilde{A}$ tienen el mismo rango r, el sistema tiene solución.

En efecto, sea M un menor no nulo de orden r de la matriz A. Como A y $\tilde{A}$ tienen igual rango, M será también menor no nulo de $\tilde{A}$.

Sin restringir generalidad podemos suponer que M está formado por las r primeras columnas y los r primeros renglones, pues disponemos del orden de las incógnitas y del orden de las ecuaciones.

De acuerdo a lo precedente, cada uno de los (m-r) renglones restantes de la matriz A, es combinación lineal de los r primeros renglones y entonces lo mismo ocurrirá con las (m-r) últimas ecuaciones con respecto a las r primeras. Siendo ellas, combinaciones lineales de las r primeras, podrán suprimirse, quedando el sistema en la forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1r+1}\,x_{r+1} - \dots - a_{1r}x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2r+1}\,x_{r+1} - \dots - a_{2r}x_n \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3r}x_r &= b_3 - a_{3r+1}\,x_{r+1} - \dots - a_{3r}x_n \\
&\;\;\vdots \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{rr+1}\,x_{r+1} - \dots - a_{rr}x_n
\end{aligned}
$$

Este sistema, para cada conjunto de valores arbitrarios que asignemos a las variables $x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_n$ resulta ser un sistema de r ecuaciones con r incógnitas y determinante no nulo, el cual sabemos tiene solución única, (Sistema de Cramer), así el sistema es determinado.

<u>Corolario</u> 1

Un sistema es incompatible si y solo si $r(A) \neq r(\tilde{A})$.

<u>Corolario</u> 2

Un sistema homogéneo siempre es compatible. (En efecto siempre rango $(A) = r(\tilde{A})$)

<u>Corolario</u> 3

Si en un sistema compatible, $r(A)$ es igual al número n de variables, el sistema es determinado.

En efecto si $m = n$, el sistema es de Cramer con determinante principal no nulo. Si $m > n$, hay $(m-n)$ ecuaciones que son combinaciones lineales de las otras y por lo tan to se pueden suprimir, quedando asi un sitema Cramer de $n = r(A)$ ecuaciones, con determinante diferente de cero.

Corolario 4

Un sistema homogéneo con rango igual al número de variables, sólo admite la solución trivial. (En efecto se cumple el corolario anterior)

Corolario 5

Si en un sistema compatible el rango $r(A)$ es menor que el número n de variables, el sistema es indeterminado.

En efecto en tal caso si $m > r(A)$ se puede suprimir $(m-r)$ ecuaciones que son combinaciones lineales de las r linealmente independientes. Se obtiene así un sistema de r ecuaciones con n variables. Siendo $n > r$, se dispone $(n-r)$ incógnitas que se pondrán en el segundo miembro, obteniéndose así un sitema Cramer de r ecuaciones con r variables y $(n-r)$ indeterminadas en el segundo miembro.

Corolario 6

Un sistema homogéneo con n variables tiene solución distinta de la trivial si y solo si $r(A) > n$. (En efecto se verifica el corolario anterior)

Terminaremos estas ideas presentando algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Para diferentes valores reales de k, discutir el sistema:

$kx + y + z = 1 \qquad x + ky + z = k \qquad x + y + kz = k^2$

Solución

Llamando A, la matriz del sistema, tenemos $\det(A) = k^3 - 3k + 2$. Este determinante se anula para $k = 1$ y para $k = -2$.

Cuando $k = 1$, el sistema se reduce a una sola ecuación: $x + y + z = 1$. En este caso el sistema admite infinitas soluciones dada por: $x = 1 - y - z$.

Cuando $k = -2$, el sistema se transforma en:

$-2x + y + z = 1 \qquad x - 2y + z = -2 \qquad x + y - 2z = 4$

que no admite solución, pues se puede verificar sin dificultad que: $r(A) = 2$ y $r(\tilde{A}) = 3$.

Finalmente para cualquier k diferente de 1 y de (-2), tenemos $\det(A) \neq 0$. El sistema es entonces de Cramer y admite una y sólo una solución

Ejemplo 2

Para diferentes valores reales de k, discutir el sistema:

$x_1 - x_2 = 1 \quad kx_2 + x_3 = 0 \quad 2x_1 - kx_3 = -1 \quad x_1 + x_2 + x_3 = -1$

Solución

Como el sistema tiene solamente tres variables, el rango de su matriz A, deberá ser 3 a lo más. Ahora el determiannte de la matriz ampliada $\tilde{A}$, es:

$$\det(\tilde{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -k & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2k^2 + 3k - 2$$

Entonces, de acuerdo al teorema de Rouche-Frobenius, el sistema es incompatible para $\det(\tilde{A}) = 2k^2 + 3k - 2 \neq 0$, pues en tal caso tenemos $r(A) \leq 3$ y $r(\tilde{A}) = 4$

Veamos que ocurre con r(A) cuando $\det(\tilde{A}) = 2k^2 + 3k - 2 = 0$, es decir para $k = -2$ y para $k = 1/2$

Fácilmente se verifica que en ambos casos se tiene $r(A) = 3$, así en ambos casos el sistema es determinado y sus soluciones son:

$x_1 = 1/2 \qquad x_2 = - 1/2 \qquad x_3 = -1 \qquad$ para $k = -2$

$x_1 = - 1/3 \qquad x_2 = - 4/3 \qquad x_3 = 2/3 \qquad$ para $k = 1/2$

Resumiendo tenemos:

a). El sistema es incompatible para $(k \neq -2$ y $k \neq 1/2)$

b). El sistema es compatible para $k = -2$ y también para

$k = 1/2$. En estos dos casos además es determinado.

Ejemplo 3

Dado el sistema lineal:

$$k\,x - 6y = 5k - 3 \qquad 2x + (k - 7)y = 29 - 7k$$

determinar k para que el sistema sea: (a). Incompatible. (b). Indetermindado.

Solución

Para que el sistema sea incompatible, debe verificarse que $r(A) \neq r(\tilde{A})$. Ahora como:

$$A = \begin{pmatrix} k & -6 \\ 2 & k-7 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} k & -6 & 5k-3 \\ 2 & k-7 & 29-7k \end{pmatrix}$$

determinemos k, de modo que: $\det(A) = 0$ y $\det(\tilde{A}) \neq 0$. La condición:

$\det(A) = k^2 - 7k + 12 = 0$ nos da: $k = 4$ y $k = 3$.

Para $k = 4$, tenemos:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 17 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{luego} \quad r(\tilde{A}) = 2 \neq r(A) = 1$$

Asi para $k = 4$, el sistema es incompatible.

Para $k = 3$, tenemos:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{luego} \quad r(\tilde{A}) = 1 = r(A)$$

Así para $k = 3$, el sistema es compatible. Como él se reduce a: $x - 2y = 4$, nuestro sistema resulta indeterminado.

Sus infinitas soluciones estan dadas por: $(x = 4 + 2a,\ y = a)$ siendo a un real cualquiera.

EJERCICIOS

1. Usando operaciones elementales, resolver:

a). $\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= -11 \end{aligned}$ b). $\begin{aligned} 8x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 9x_4 &= 18 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 &= 9 \\ 4x_1 + 0 - 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

2. Determinar k, de modo que el sistema:

$4x_1 - kx_2 - x_3 = 1 \quad kx_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \quad -x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$

tenga: (a). Una y solo una solución. (b) Infinitas soluciones. (c) Ninguna solución.

3. Estudiar el sistema homogéneo: (Corolario 4)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 & 4x + 5y + 2z &= 0 \\ 2x + y - 3z &= 0 & x - y &= 0 \end{aligned}$$

4. Estudiar el sistema homogéneo: (Corolario 6).

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 5z + t &= 0 & -x + 6y + 2z + 3t &= 0 \\ x + 4y + 3z + 2t &= 0 & 3x - 8y - z + 4t &= 0 \end{aligned}$$

5. Determinar la constante real k, de modo que el sistema

$$\begin{aligned} (1 - k)x + y + z &= 0 \\ 2x + (2 - k)y + 2z &= 0 \\ x + y + (1 - k)z &= 0 \end{aligned}$$

tenga solución distinta de la trivial. (Corolario 6)

6. Usando el teorema de Rouché-Frobenius, demuestre que el sistema: (5 ecuaciones)

$x - 5y + z = 4 \quad 2x + y - z = 1 \quad x + 6y - 2z = 3$

$4x - 9y + z = 9 \qquad x - 16y + 4z = 8$

es incompatible.

7. Determine los valores de a que hacen incompatible al sistema: (3 ecuaciones)

$3x - ay + 2z = a - 1 \qquad 2x - 5y + 3z = 1$

$x + 3y - (a - 1)\, z = 0$

8. Dado el sistema (4 ecuaciones)

$x - y + z = 7 \qquad x + y - z = 1$

$-x + y + z = 3 \qquad 2x + ky - 4z = k$

determinar k para que él sea compatible.

9. Dado el sistema (4 ecuaciones)

$3x - 7y = a \qquad 5x - 13y = 5a - 2b$

$x + y = b \qquad x + 2y = a + b - 1$

determinar a y b para que sea compatible

10. Determine los valores de k, de modo que el sistema:

$x + y = k \qquad ax + by = k^2 \qquad a^2x + b^2y = k^3$

sea compatible, siendo $a \neq b$

11. Determine a para que el sistema

$x + a^2y + a = 0 \quad ax + y + a^2 = 0 \quad a^2x + ay + 1 = 0$

sea compatible

12. Estudiar el sistema

$ax + by = 1 - ab^2 \qquad bx + ay = 1 - a^2b$

$ab(x + y) = - a^2b^2$

según sean los valores de a y b.

13. Discutir el sistema:

$ax + by + z = 1 \quad x + aby + z = b \quad x + by + az = 1$

para diferentes valores de a y b.

14. Determinar los valores de k en el sistema:

$$\begin{aligned}(k+1)x + y + z &= k^2 + 3k\\ x + (k+1)y + z &= k^3 + 3k^2\\ x + y + (k+1)z &= k^4 + 3k^3\end{aligned}$$

para que el sistema sea: (a). Determinado (b). Indeterminado.

15. Dado el sistema:

$ax + 2z = 2 \quad 5x + 2y = 1 \quad x - 2y + bz = 3$

con a y b enteros positivos, determinar a y b para que el sistema sea: (i) Compatible. (j) Incompatible. (k). Resuélvalo cuando sea indeterminado.

16. Demostrar que si el sistema: (4 ecuaciones)

$-x + by + cz + dt = 0 \quad ax + by - z + dt = 0$

$ax - y + cz + dt = 0 \quad ax + by + cz - t = 0$

tiene solución diferente de la trivial, se verifica que:

$a/(1 + a) + b/(1 + b) + c/(1 + c) + d/(1 + d) = 1$

17. Demuestre que el sistema homogéneo:

$x + y - a(z + u) = 0 \quad a(x - y) - (z - u) = 0$

$x + y - b(z - u) = 0 \quad b(x - y) - (z - u) = 0$

tiene solución diferente de la trivial y ella está dada por: $x/(1 + ab) = y/(1 - ab) = z/(a + b) = u/(b - a)$

8. VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

DEF 8.1

Llamaremos vector, toda matriz columna.

Los vectores, o sea las matrices columnas, para diferenciarlas de las otras matrices, las designaremos por letras griegas. Particularmente cada vector nulo será designado por θ

DEF 8.2

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, un vector propio de ella, es todo vector no nulo $\xi \in k^n$, tal que: $A\,\xi = t\,\xi$, para algún escalar t.

Ejemplo 8.1

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, tiene a, $\xi = (1,2)^t$, como vector propio, pues:

$$A\,\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\,\xi.$$

TEOREMA 8.1

Un vector propio ξ de una matriz cuadrada A, determina de manera única el escalar t, tal que: $A\xi = t\,\xi$.

Dm

Supongamos que al vector propio ξ corresponda dos escalares t_1 y t_2 tales que: $A\xi = t_1\xi$ y $A\xi = t_2\xi$, entonces restando resulta: $(t_1 - t_2)\xi = \theta$, y como ξ no es nulo, queda: $t_1 = t_2$

DEF 8.3

Un escalar t es valor propio de la matriz cuadrada A si y sólo si, hay un vector no nulo ξ, tal que: $A\xi = t\xi$

TEOREMA 8.2

Un escalar t es valor propio de una matriz cuadrada A, si y solo si: $\det(A - tI) = 0$

Dm

Sea t valor propio de la matriz cuadrada A, entonces existe un vector no nulo ξ, tal que: $A\xi = t\xi$.
Considerando que $\xi = I\xi$, la igualdad precedente se expresa por: $(A - tI)\xi = \theta$ y pasando a lenguage escalar tenemos el sistema lineal homogéneo:

$$
\begin{array}{rcrcccr}
(a_{11} - t)\, x_1 & + & a_{12}\, x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{1n}\, x_n = 0 \\
a_{21}\, x_1 & + & (a_{22} - t) x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{2n}\, x_n = 0 \\
a_{31}\, x_1 & + & a_{32}\, x_2 & + & \ldots\ldots & + & a_{2n}\, x_n = 0 \\
a_{n1}\, x_1 & + & a_{n2}\, x_2 & + & \ldots\ldots & + & (a_{nn} - t) x_n = 0
\end{array}
$$

que por hipotésis tiene solución: $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ no nula. Así su determinante debe ser cero, o sea, t es tal que $\det(A - tI) = 0$.

Recíprocamente si $\det(A - tI) = 0$, el sistema: $(A - tI)\xi = \theta$ tendrá por lo menos una solución ξ, distinta de la trivial, es decir, hay un vector no nulo ξ, tal que $A\,\xi = t\,\xi$.

<u>Ejemplo</u> 8.2

Determinar los valores propios de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>

De acuerdo al teorema precedente los valores propios de una matriz A son las raices t de la ecuación: $\det(A - tI) = 0$

Así: $A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 4 & 3-t \end{pmatrix}$

Entonces: $\det(A - tI) = t^2 - 4t - 5 = 0$, nos dá los valores propios: $t_1 = -1$ y $t_2 = 5$.

Analogamente para la matriz B, tenemos:

$$B - tI = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -2 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix}$$

Entonces: $\det(B - tI) = t^2 - 2t + 3 = 0$, nos da los valores propios: $t_1 = 1 + i\sqrt{2}$ y $t_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

<u>DEF</u> 8.4

La ecuación característica de una matriz cuadrada A, es la ecuación $\det(A - tI) = 0$.

Desarrollando la ecuación caracteristica o sea:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t \cdots & a_{3n} \\ \multicolumn{3}{c}{\text{-------------------------------}} & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots\cdots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = 0$$

según potencias de $(-t)$, ella toma la forma:

$$(-t)^n + p_1 (-t)^{n-1} + p_2 (-t)^{n-2} + \ldots + p_{n-1} (-t) + p_n = 0$$

Obviamente, de acuerdo al teorema 8.2 las raíces de esta ecuación son los valores propios de la matriz A.

DEF 8.5

La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada A es la traza de la matriz y se designa por: $tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots\ldots + a_{nn}$

TEOREMA 8.3

Para toda la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de ecuación característica:

$$(-t)^n + p_1 (-t)^{n-1} + p_2 (-t)^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

se tiene:

a). $p_1 = \sum_{j=1}^{n} t_j = tr\ (A)$ b). $p_n = \prod_{j=1}^{n} t_j = det\ (A)$

Dm

Considerando las relaciones que existen entre las raíces

t_j de la ecuación y sus coeficientes, resulta inmediato que:

$$p_1 = \sum_{j=1}^{n} t_j \qquad y \qquad p_n = \prod_{j=1}^{n} t_j \tag{1}$$

por otra parte de acuerdo con la ecuación característica de la matriz A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t & \cdots & a_{3n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - t \end{vmatrix} = 0$$

se observa que los términos en t^n y t^{n-1} provienen únicamente del producto: $(a_{11} - t)(a_{22} - t)(a_{33} - t) \cdots (a_{nn} - t)$

que desarrollado nos da:

$$(-1)^n\, t^n + (-1)^{n-1}\, t^{n-1}\, (a_{11} + a_{22} + \cdots\, a_{nn}) + \cdots$$

luego:

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \mathrm{tr}\ (A) \tag{2}$$

Finalmente el término p_n, independiente de t en la ecuación característica det $(A - tI) = 0$, se obtiene haciendo $t = 0$, así resulta inmediato que:

$$p_n = \det\ (A) \tag{3}$$

Resumiendo las conclusiones obtenidas en (1), (2) y (3), queda:

$$tr(A) = t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_n$$
$$det(A) = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots\ldots \cdot t_n$$

Corolario

Una matriz es singular si y solo si tiene a cero como valor propio.

Ejemplo 8.3

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, tenemos:
traza (A) = 1 + 3 = 4 y det(A) = -5. Ahora la ecuación característica de esta matriz es $det(A - tI) = t^2 - 4t - 5 = (-t)^2 + 4(-t) - 5$, entonces: $p_1 = 4 = tr(A)$ y $p_2 = -5 = det(A)$. Finalmente como los valores propios de A son $t_1 = -1$ y $t_2 = 5$, tenemos: $tr(A) = t_1 + t_2 = 4$ y $det\ (A) = t_1\ t_2 = -5$

TEOREMA 8.4

Las matrices cuadradas A y A^t tienen los mismos valores propios.

Dm

Sabemos que un escalar t es valor propio de una matriz cuadrada A, sí y sólo si: $|A - tI| = 0$. Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned} det\ (A^t - tI) &= det\ (A^t - tI^t) \\ &= det\ (A - tI)^t = det\ (A - tI) = 0 \end{aligned}$$

resultado que nos asegura que t es valor propio de A^t, si y sólo si es valor propio de A.

Ejemplo 8.4

Determinar los vectores propios de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

La ecuación característica de la matriz A, es $\det(A - tI) = -t^3 + 2t^2 + t - 2 = 0$. De aquí se obtiene facilmente $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ y $t_3 = 1$.

Llamando $\alpha = (x, y, z)^t$ vector propio asociado al valor propio $t_1 = 1$, debe verificarse que: $A\alpha = t\alpha$, o sea: $A\alpha - \alpha = \theta$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 4x + 0y - z \\ 4x - 2y + z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así tenemos el sistema homogéneo:

$$-y + z = 0 \qquad 4x - y - z = 0 \qquad 4x - 2y = 0$$

que por tener matriz singular admite solución diferente de la trivial. Resolviendo se encuentra: $(x = x; \ y = 2x; \ z = 2x)$

luego α es de la forma $\alpha = (x, 2x, 2x)$. Tomando por agrado $x = 1$, se obtiene: $\alpha = (1, 2, 2)$.

Analogamente, llamando $\beta = (x, y, z)^t$ al vector propio, asociado al valor propio $t_2 = 2$, se encuentra el sistema:

$$x + y - z = 0 \qquad 4x - 2y - z = 0$$

cuya familia de soluciones es: $(x = x; y = x; z = 2x)$. Así el vector β es del tipo $\beta = (x, x, 2x)$. Particularmente puede tomarse $\beta = (1, 1, 2)$

Finalmente para el valor propio $t = -1$, se encuentra $\gamma = (0, z, z)$ y particularmente se puede tomar: $\gamma = (0, 1, 1)$.

Se puede comprobar facilmente que los vectores propios α, β y γ determinados, son linealmente independientes.

Terminaremos observando que los valores propios de A^t son tambien 1, 2 y (-1) y dejando al lector la determinación de los vectores propios.

TEOREMA 8.5

Si t es valor propio de A, correspondiente al vector propio ξ, entonces, t^p es valor propio de A^p, asociado con ξ, siendo p entero positivo.

Dm

Se hará por inducción. Llamando ξ un vector propio de A, asociado al valor t, para p = 1, tenemos:

$$A^1 \xi = A \xi = t \xi = t^1 \xi$$

Supongamos entonces que para p = k tenemos: $A^k\xi = t^k\xi$, resulta así:

$$A^{k+1} \xi = A(A^k \xi) = A(t^k \xi) = t^k (A \xi) = t^{k+1} \xi$$

que nos indica que t^{k+1}, es valor propio de la matriz A^{k+1}.

TEOREMA 8.6

Si $t \neq 0$ es valor propio de la matriz no singular A, asociado al vector propio ξ, entonces t^{-1} es valor propio de la matriz recíproca A^{-1}, correspondiente al mismo vector propio ξ.

Dm

En la hipótesis que $A \xi = t \xi$, debemos demostrar que $A^{-1} \xi = t^{-1} \xi$ para ello premultiplicando la hipótesis por A^{-1}, queda:

$(A^{-1} A)\xi = t A^{-1} \xi$, o sea: $t^{-1} \xi = A^{-1} \xi$

Corolario

Si $t \neq 0$ es valor propio de la matriz no singular A correspondiente a ξ, t^{-p} es valor propio de la matriz A^{-p}, para el mismo vector propio ξ.

En efecto: $A^{-p}\xi = (A^{-1})^p\xi = (t^{-1})^p\xi = t^{-p}\xi$.

DEF 8.6

Dado un polinomio: $q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son elementos de un cuerpo k, se llama polinomio matricial en A, siendo A una matriz cuadrada con elementos en k, a la expresión:

$$q(A) = a_oI + a_1A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n.$$

TEOREMA 8.7

Sean $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$, distintos o no, los valores propios de una matriz A de orden n, sea q(A) un polinomio en A, entonces los valores propios de q(A) son: $q(t_1), q(t_2), q(t_3), \ldots, q(t_n)$.

Dm

Se deja como ejercicio.

TEOREMA 8.8

Los vectores propios $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ de una matriz A, correspondientes a los valores propios diferentes $t_1, t_2, \ldots, t_p$ son linealmente independientes.

Dm

Se hará por inducción completa. Obviamente el teorema se verifica para p = 1. Aceptemos entonces que la tésis propuesta se cumple para $p = m-1$ y tratemos de probar que $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ son linealmente independientes.

Supongamos que $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ son linealmente dependientes, entonces existen números a_k, no todos nulos, tales que:

$$\xi_m = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_{m-1} \xi_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} a_k \xi_k$$

entonces:

$$A \xi_m = A \sum_{k=1}^{m-1} a_k \xi_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k A \xi_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k t_k \xi_k$$

Ademas, por otra parte se tiene:

$$A \xi_m = t_m \xi_m = t_m \sum_{k=1}^{m-1} a_k \xi_k = \sum_{k=1}^{m-1} t_m a_k \xi_k$$

Restando miembro a miembro resulta:

$$\theta = \sum_{k=1}^{m-1} a_k t_k \xi_k - \sum_{k=1}^{m-1} t_m a_k \xi_k = \sum_{k=1}^{m-1} (t_k - t_m) a_k \xi_k$$

y puesto que $t_k \neq t_m$ y no todos los a_k son nulos, se concluye que los vectores $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{m-1}$ son linealmente dependientes, lo que contradice la hipótesis.

Así entonces, los vectores: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, correspondientes a valores propios diferentes: $t_1, t_2, \ldots, t_p$, son linealmente independientes.

Corolario

Si los valores propios t_j, de una matriz A de orden n, son todos diferentes, la matriz $X = (\xi_1\ \xi_2\ \ldots\ \xi_n)$ que tiene como columnas los vectores propios correspondientes es no-singular

Ejemplo 8.5

Anteriormente hemos visto que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene los valores propios: $t_1 = 1$; $t_2 = 2$ y $t_3 = -1$, todos diferentes. Además a ellos corresponde, respectivamente, los vectores propios: $\alpha = (1, 2, 2)$, $\beta = (1, 1, 2)$ y $\gamma = (0, 1, 1)$ que son linealmente independientes.

Observación

El teorema precedente nos asegura que en una matriz, a valores propios diferentes, corresponde vectores propios linealmente independientes. Es de interés preguntarse, que ocurre con los vectores propios asociados a valores propios no diferentes. El ejemplo que damos a continuación ilustra esta situación.

Ejemplo 8.6

Determinar los valores y los vectores propios de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Para la matriz A, se encuentra $\det(A - tI) = (1 - t)^2 (3 - t)$ y entonces sus valores propios son: $t_1 = t_2 = 1$ y $t_3 = 3$. Para el valor propio $t_1 = t_2 = 1$, se obtiene el conjunto de vectores propios: $\alpha = x(1, 0, 0) + y(0, 2, 1)$. De donde se puede tomar los vectores propios linealmente independientes: $\alpha_1 = (1, 0, 0)$ y $\alpha_2 = (0, 2, 1)$. Finalmente al valor propio $t_3 = 3$, corresponde le vector propio: $\alpha_3 = (1, 0, -1)$.

Para la matriz B, resulta la ecuación característica: $\det(B - tI) = (3 - t)^2(2 - t) = 0$, que nos dá los valores propios $t_1 = t_2 = 3$ y $t_3 = 2$. El valor $t_2 = 3$, a pesar de ser raiz doble, solo dá el vector propio: $\beta_1 = (x, 0, 0)$. Al valor propio $t_3 = 2$, corresponde el vector propio $\beta_2 = (0, 0, z)$.

Observación

El próximo teorema que veremos es de primera importancia por sus numerosas aplicaciones. Con el propósito que la demostración que daremos, resulte suficientemente clara, deseamos que el lector observe, que si los elementos de una matriz M de orden n, son polinomios en t de grado k o menor, la matriz M se puede expresar en la forma:

$$M = M_k\ t^k + M_{k-1}\ t^{k-1} + \ldots. + M_2\ t^2 + M_1 t + M_o$$

donde M_j con $0 \leq j \leq k$, son matrices de orden n, con elementos independientes de la variable t.

Ejemplo 8.7

$$\begin{pmatrix} t^3 + 1 & t^2 - 3t + 5 \\ 2t & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t^2 +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Teorema 8.9 (Cayley-Hamilton)

Si la ecuación característica de una matriz A de orden n, es $p(t) = O$, la matriz A es raiz de la ecuación matricial: $p(X) = \mathbf{O}$

Dm

El polinomio característico de A es: $p(t) = \det(A - tI) = \det M$, donde $M = A - tI$. Como la matriz M es de orden n, los elementos de su matriz adjunta M^+, serán polinomios en t de grado (n-1) a lo más. Así de acuerdo con la observación precedente tenemos:

$$M^+ = M_{n-1} t^{n-1} + M_{m-2} t^{n-2} + \ldots. + M_1 t + M_o$$

donde M_j, son matrices de orden n, con elementos independientes de la variable t.

De acuerdo al teorema: $MM^+ = M^+M = I \det M$, tenemos:

$$p(t)I = M\,M^+ = (A - tI)M^+ = A\,M^+ - tM^+ \qquad (1)$$

Como A es matriz de orden n, supongamos que su polinomio característico es:

$$p(t) = a_o + a_1t + a_2t^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n$$

entonces

$$p(t)I = a_oI + a_1It + \ldots\ldots + a_{n-1}It^{n-1} + It^n \qquad (2)$$

$$AM^+ = AM_{n-1}t^{n-1} + AM_{n-2}t^{n-2} + \ldots\ldots + AM_1t + AM \qquad (3)$$

$$tM^+ = M_{n-1}t^n + M_{n-2}t^{n-1} + \ldots\ldots + M_1t^2 + M_ot \qquad (4)$$

De las expresiones (1), (2), (3) y (4) se obtiene fácilmente:

$$a_oI = A\,M_o \qquad a_1I = A\,M_1 - M_o \qquad a_2I = A\,M_2 - M_1$$

$$a_{n-1}I = A\,M_{n-1} - M_{n-2} \qquad e \qquad I = -M_{n-1}$$

Multiplicando estas igualdades respectivamente por: A^o, A^1, A^2, ..., A^{n-1} y A^n y luego sumando queda:

$$a_oI + a_1A + a_2A^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = O$$

Así queda probado que cada matriz es raiz de su ecuación característica.

Ejemplo 8.8

Usando el teorema de Cayley-Hamilton, determinar la inversa A^{-1} de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución

La ecuación característica de A es: $t^3 - 3t^2 - 9t + + 3 = 0$. Entonces como cada matriz es raiz de su ecuación característica tenemos: $A^3 - 3A^2 - 9A + 3I = Q$, de donde $A \frac{1}{3} (-A^2 + 3A + 9I) = I$. Ahora como la inversa A^{-1} de A es tal que: $A A^{-1} = I$; concluímos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} (-A^2 + 3A + 9I) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8.9

Usando el teorema de Cayley-Hamilton, calcular: A^{723}, siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

La ecuación característica de A es: $(p(t) = t^2 - 1 = 0$. Así los valores propios de A son $t_1 = 1$ y $t_2 = - 1$. Además $A^2 - I = Q$. Tomemos el polinomio $m(t) = t^{723}$. Dividiendo este polinomio $m(t)$ por el polinomio característico:

$p(t) = t^2 - 1$, se tendrá un polinomio cuociente $q(t)$ y un resto $r(t)$ que será de la forma $r(t) = a_o + a_1 t$. Así tenemos

$$\frac{m(t)}{p(t)} + q(t) + \frac{a_o + a_1 t}{p(t)}$$

luego: $m(t) = q(t)\, p(t) + a_1 t + a_o$ (1)

Esta igualdad de polinomios algebraicos da origen a la igualdad matricial: $m(A) = q(A)\, p(A) + a_1 A + a_o I$ (2)

la cual considerando que $p(A) = 0$, se reduce a:

$$A^{723} = a_1 A + a_o I \qquad (3)$$

De aquí que, habremos determinado A^{723} cuando calculemos a_1 y a_o. Para ello reemplazando t por $t_1 = 1$ y $t_2 = -1$ en la igualdad (1) obtenemos el sistema:

$$1^{723} = a_1 + a_o \qquad\qquad (-1)^{723} = -a_1 + a_o$$

de donde: $a_o = 0$ y $a_1 = 1$. Reemplazando estos valores en (3), resulta:

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{723} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>DEF</u> 8.7

El polinomio mínimo de una matriz A es el polinomio escalar:

$$m(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + ,,, + a_m$$

de menor grado, tal que:

$$A^m + a_1 A^{m-1} + a_2 A^{m-2} + \dots + a_m I = Q$$

TEOREMA 8.10

Cada matriz cuadrada A tiene un y solamente un polinomio mínimo.

Dm

La existencia del polinomio mínimo es inmediata, pues toda matriz es raíz de su ecuación característica. Supongamos que A tiene dos polinomios mínimos: $m_1(x) \neq m_2(x)$. Como ellos deben tener el mismo grado, su diferencia:

$$d(x) = m_1(x) - m_2(x)$$

será un polinomio de grado menor, que se anula para A. Esta conclusión contradice la hipótesis de ser $m_1(x)$ polinomio mínimo, luego $m_1(x) = m_2(x)$.

TEOREMA 8.11

Cada factor lineal $(x - t)$ del polinomio característico $p(x)$ de una matriz A, es también factor de su polinomio mínimo $m(x)$.

Dm

Supongamo que $(x - t)$ factor del polinomio característico, no sea factor del polinomio mínimo $m(x)$, entonces se tendrá:

$$m(x) = (x - t)\ q(x) + r$$

donde r es constante no nula. Reemplazando x por A, queda:

$$m(A) = (A - t\,I)\,q(A) + r\,I = O$$

y como r no es nulo, obtenemos: $-(A - t\,I)(q(A)/r) = I$ expresión que nos indica que la matriz $(A - t\,I)$ tiene recíproca; pero esta afirmación es falsa, pues $(A - t\,I)$ es matriz singular por ser t valor propio de ella. Así debe tenerse $r = 0$ y entonces $(x - t)$ es factor del polinomio mínimo $m(x)$.

Corolario

Si A de orden n tiene todos sus valores propios diferentes:

$$p(x) = (-1)^n\, m(x)$$

Observación

El teorema precedente podría inducir a creer que el polinomio mínimo $m(x)$, de una matriz A, es simplemente el producto de los factores distintos del polinomio característico $p(x)$. Tal cosa no ocurre y para probarlo basta considerar un ejemplo.

Para la matriz de quinto orden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es inmediato que su polinomio característico es: $p(x) = (-1)^5 (x-1)^5$, y como:

$$A - I \neq Q \qquad (A - I)^2 = Q \qquad (A - I)^3 \neq Q \qquad (A - I)^4 \neq Q$$

ocurre que ninguno de los polinomios: $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$ y $(x-1)^4$ es polinomio mínimo de A. El es $m(x) = (x - 1)^5$.

<u>DEF</u> 8.8

Una matriz cuadrada A es diagonalizable si y solo si existe una matriz no singular X, tal que: $X^{-1} A X = D$, siendo D una matriz diagonal.

<u>Ejemplo</u> 8.10

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, pues para:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{se tiene} \qquad X^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$X^{-1} A X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>TEOREMA</u> 8.12

Una matriz cuadrada A de orden n, que tiene n vectores propios linealmente independientes es diagonalizable.

Dm

Sea: α_1 α_2, α_3, ..., α_n, los n vectores propios de A, linealmente independientes, y en correspondencia con los valores propios: t_1, t_2, t_3, ..., t_n, no necesariamente diferentes.

Definamos una matriz X por:

$$X = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n)$$

es decir X es matriz cuadrada de orden n, cuyas columnas son los vectores propios α_j de A. Como los vectores α_j son linealmente independientes, tenemos det X $\neq$ 0, y entonces existe la matriz inversa X^{-1}, Además:

$$\begin{aligned} AX &= A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n) \\ &= (A\,\alpha_1\ A\,\alpha_2\ \ldots\ A\,\alpha_n) \\ &= (t_1\,\alpha_1\ t_2\,\alpha_2\ \ldots\ t_n\,\alpha_n) \\ &= (\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n) \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así entonces hemos obtenidos: AX = XD, de donde: X^{-1} AX = D.

Corolario

La matriz X que diagonaliza una matriz A, tiene como columnas los vectores propios de A.

Corolario

En la expresión: $X^{-1} AX = D$, los elementos de la matriz diagonal D, son los valores propios de A, dispuestos en el orden en que , en X se tomaron los vectores propios de A.

Ejemplo 8.11

Diagonalizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución

1° Se determinan los valores propios de A, obteniéndose: $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ y $t_3 = 7$.

2°En correspondencia con estos valores propios determinamos los vectores propios: $\alpha_1 = (1, 0, -1)^t$, $\alpha_2 = (0, 1, -1)^t$ y $\alpha_3 = (1, 2, 3)^t$.

3° Con estos vectores propios contruimos X y determinamos X^{-1}:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad X^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$X^{-1} AX = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Observación

Se comprende sin difucultad que la suma de matrices diagonales y el producto de matrices diagonales da matrices diagonales. Además las matrices diagonales conmutan y toda la operatoria entre ellas inside únicamente en los elementos de su diagonal principal. Obviamente, entonces, el algebra de las matrices diagonales ofrece ventajas de computación con respecto a las matrices no diagonales.

La observación precedente explica el interés que naturalmente existe, en determinar cuando una matriz se puede reducir a la forma diagonal y cuando ello es posible, encontrar el procedimiento para obtener dicha matriz diagonal.

EJERCICIOS

1.- Muestra que = $(500)^t$ es un vector propio de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.- Determine los valores y los vectores propios de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Solución} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= (4 \quad 1 \quad 0)^t \\ \alpha_2 &= (3 \quad 2 \quad 2)^t \\ \alpha_3 &= (3 \quad 0 \quad 0)^t \end{aligned}$$

3.- Demuestre que una matriz A es singular si y solo si tiene a cero como valor propio.

4.- Si t es valor propio de A, muestre que at es valor propio de: aA.

5.- Si el producto de los valores propios de una matriz A es p, demuestre que det A = p.

6.- Determine los vectores propios de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7.- Verifique que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ es raiz de su ecuación característica.

8.- Calcule: A^{101}, para $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

9.- Calcule: $A^{602} - 3A^3$, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

10.- Calcule: $A^{1025} - 4A^5$, para $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

11.- Determine: $A^{24} - 3A^{15}$, para $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

12.- Determine: $A^{14} - 3A^{13}$, para $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

13.- Demuestre que los valores propios de una matriz hermítica ($A = A^*$) son todos reales.

14.- Los valores propios de una matriz simétrica ($A = A^t$) real, son todos reales.

15.- Demuestre que en una matriz hermítica ($A = A^*$) los vectores propios correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales.

16.- En una matriz simétrica ($A = A^t$) de elementos reales, los vectores propios correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales.

17.- Demuestre que las matrices similares ($B = P\,A\,P^{-1}$) tienen la misma ecuación característica.

18.- Demuestre que las matrices similares tienen el mismo polinomio mínimo.

19.- Determine los polinomios característicos y los polinomios mínimos de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

20.- Demuestre que una matriz cuadrada A tiene inversa A^{-1}, si y solo si, el término constante de su polinomio mínimo es diferente de cero.

21.- Para la matriz A, determine una matriz X ortogonal $(X^{-1} = X^t)$ que la diagonalize.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

22.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, se pide primero diagonalizarla y luego calcular: A^{31}.

23.- Usando el teorema de Cayley-Hamilton determine la expresión más reducida posible, del polinomio matricial: $P(A) = A^6 - 2A^5 + A^4 - 3A^2 + A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

24.- Sean A y B matrices cuadradas conmutativas. Sea α un vector propio de A, en correspondencia con el valor propio t. Demuestre que B también es vector propio de A, para el mismo valor propio t.

25.- Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden con A no-singular. Demuestre que AB y BA tienen el mismo polinomio característico. (Ind: Use ejercicio 17).

26.- En cada matriz A de orden n sobre k, los vectores propios correspondientes a un determinado valor propio t, junto con el vector nulo forman un sub-espacio de k^n. (Espacio propio de t).

27.- Para la matriz A, se piden expresar A^n en la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^n = a_n A + b_n I$

siendo n natural.

(Ind: Use la mecánica indicada en ejercicio 8.9)

28.- Demostrar que para la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$, se verifica que: $A^3 = 0$, implica $(a + d) = 0$. (Ind: Use Cayley-Hamilton).

29.- Si una matriz A de orden n, sobre R, verifica la ecuación: $A^k = I$, con $k \leq n$ y k natural, ocurre que los valores propios de A son las raices k-ésimas de la unidad. (Ind: Polinomio mínimo).

30.- Si t es valor propio de una matriz A ortogonal ($A^{-1} = A^t$), demuestre que: $t \neq 0$ y que $1/t$ es valor propio de A.

31.- Si t es valor propio de una matriz A unitaria ($A^{-1} = A^*$), también es valor propio de A, el número: $1/\bar{t}$.

32.- Si para una matriz A de orden n, se verifica que: $A^2 = A$, demuestre que la matriz sólo admite los valores propios 1 y 0.

33.- Demuestre que cada valor propio de una matriz antisimétrica ($A = -A^t$) es número imaginario

34.- Una matriz $A = (a_{ij})$ de orden n x n, definida sobre el cuerpo de los reales, es matriz de Markov o matriz estocástica, si y solo si:

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

Demuestre que todo valor propio t de una matriz estocastica verifica: $|t| \leq 1$.

9. TRANSFORMACIONES LINEALES

DEF 9.1

Dados dos espacios vectoriales V y W sobre un cuerpo K, se llama transformación lineal de V en W, toda aplicación $T : V \rightarrow W$, tal que:

a). $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta) \quad \forall\ \alpha \in V \wedge \beta \in V$

b). $T(a\alpha) = a\,T(\alpha) \quad \forall\ \alpha \in V \wedge a \in K$

Las transformaciones lineales se llaman también homomorfismos.

EJEMPLO 9.1

La transformación: $I : V \rightarrow V$, definida por:

$I(\alpha) = \alpha \quad \forall\ \alpha \in V$

es obviamente lineal. Ella se conoce con el nombre de transformación identidad.

EJEMPLO 9.2

La función $O: V \rightarrow V$, definida por:

$O(\alpha) = \theta \quad \forall\ \alpha \in V$

es lineal y se conoce con el nombre de trnasformación nula.

EJEMPLO 9.3

Sea V el espacio de los polinomios sobre el cuerpo R. En este espacio son transformaciones lineales, la derivación y la integración, definidas por:

$$D\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j\right) = \sum_{j=1}^{n} j\, a_j\, x^{j-1}$$

$$J\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1}\, x^{j+1}$$

EJEMPLO 9.4

Sea V el espacio de las matrices de orden nx1 y W el de las matrices de orden mx1 sobre un cuerpo K. Sea A una matriz determinada de orden mxn sobre K, entonces la función:

$$T(\alpha) = A\,\alpha \qquad \forall\, \alpha \in V$$

es una transformación lineal de V a W.

TEOREMA 9.1

Sean V y W espacios vectoriales finitos sobre un cuerpo K. Dada una base $\{\alpha_j\}^n$ para V y n vectores cualesquiera $\{\omega_j\}_{j=1}^{n}$ en W, existe una y sólo una transformación lineal T de V a W, tal que:

$$T(\alpha_j) = \omega_j \qquad j = 1,2,3,\ldots\ldots n.$$

Dm

Tomado $\alpha \in V$, existe en K un y sólo un conjunto de escalares $\{a_j\}_1^n$, tale que:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \alpha_j$$

Definamos la función $T : V \longrightarrow W$ por:

$$T\ (\alpha) = \sum_{j=1}^{n} a_j\ \omega_j$$

Haciendo $\alpha = \alpha_j$, resulta: $T(\alpha_j) = \omega_j$ para $j = 1,2,3,\ldots n$ de modo que hemos definido una aplicación T, con la propiedad deseada. Sólo falta mostrar que esta aplicación es lineal y es única.

Tomando $p \in K$, tenemos: $p\alpha = \sum_{j=1}^{n} p\ a_j\ \alpha_j$ luego:

$$T(p\alpha) = \sum_{j=1}^{n} p\ a_j\ \omega_j = p \sum_{j=1}^{n} a_j\ \omega_j = p\ T(\alpha)$$

Ahora tomando $\beta \in V$, tenemos: $\beta = \sum_{j=1}^{n} b_j\ \alpha_j$, entonces:

$$\alpha + \beta = \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)\ \alpha_j$$

luego:

$$T(\alpha + \beta) = \sum_{j=1}^{n} a_j\ \omega_j + \sum_{j=1}^{n} b_j\omega_j = T(\alpha) + T(\beta).$$

o sea T es transformación lineal.

Finalmente probaremos que T es única. Para ello sea S otra transformación lineal para la cual se tiene:

$$S(\alpha_j) = \omega_j \qquad j = 1,2,3,\ldots\ldots,n.$$

Entonces:

$$S(\alpha) = S(\sum_{j=1}^{n} a_j\ \alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j\ S(\alpha_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j\ \omega_j = T(\alpha) \qquad \forall\ \alpha \in V$$

resultado que nos muestra que T es única.

Observación

Hacemos notar que en el teorema precedente los vectores ω_j de W son arbitrarios, así, ellos pueden tomarse linealmente dependientes y aún todos iguales.

Nomenclatura

El conjunto de las transformaciones lineales de V y W lo designaremos con la notación: Hom(V,W).

TEOREMA 9.2

Sean V y W espacios vectoriales sobre K, de dimensiones n y m respectivamente. Sea $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ una base para V y $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ una base para W. Entonces para cada transformación lineal $T: V \to W$, existe una matriz A de orden m x n sobre K, tal que:

$$T(\alpha) = A\vec{X} \qquad \forall\ \alpha \in V.$$

donde $\vec{X}$ es el vector cordenada de α en la base $\{\alpha_j\}$

Dm

Tomado arbitrariamente $\alpha \in V$, existen escalares $x_j \in K$, tales que:

$$\alpha = x_1\,\alpha_1 + x_2\,\alpha_2 + \ldots + x_n\,\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\,\alpha_j$$

luego:

$$T(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,T(\alpha_j) \tag{1}$$

Ahora como $T(\alpha) \in W$, existen escalares $y_i \in K$, tales que:

$$T(\alpha) = Y_1\ \beta_1 + Y_2\ \beta_2 + \ldots + Y_m\ \beta_m = \sum_{i=1}^{m} y_i\ \beta_i \qquad (2)$$

y puesto que también $T(\alpha_j) \in W$, tenemos:

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ \beta_i \qquad \text{con } j = 1,2,\ldots,n$$

Reemplazando estas expresiones en (1) resulta:

$$T(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ \beta_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\ a_{ij} \right) \beta_i \qquad (3)$$

Comparando (2) y (3), obtenemos:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \qquad \text{con } i = 1,2,\ldots m$$

o sea:

$$y_1 = a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n$$

$$y_2 = a21\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n$$

$$y_3 = a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + \ldots + a_{3n}\ x_n$$

$$\text{-------------------------------------}$$

$$y_m = a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Finalmente poniendo $A = (a_{ij})$, tenemos:

$$A\vec{X} = T(\alpha) \qquad \forall\ \alpha \in V$$

La matriz A será por definición la matriz representativa de la transformación T con respecto a las bases $\{\alpha_j\}$ y $\{\beta_i\}$ de V y W respectivamente.

Corolario

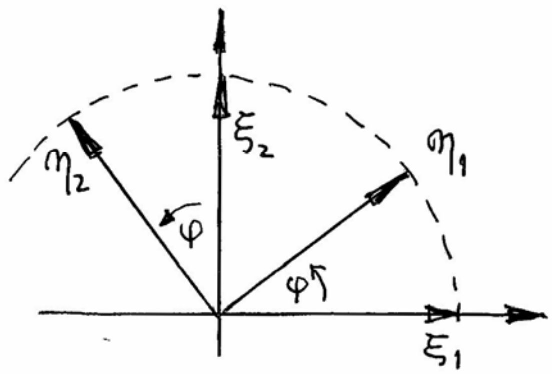
La correspondencia entre el conjunto Hom(V,W) y el conjunto de todas las matrices $A = (a_{ij})$ de orden mxn sobre el cuerpo K es uno-a-uno.

Observación

En el teorema precedente hemos puesto $A\vec{X} = T(\alpha)$, para cada $\alpha \in V$, en rigor deberíamos colocar: $A\vec{X} = \vec{Y}$, siendo $\vec{Y} = (y_1, y_2 \ldots y_m)$ el vector-cordenada de $T(\alpha)$ en la base $\{\beta_i\}^m$. Sin embargo dado el isomorfismo existente entre W y K^m, será usual que cuando no haya temor a confusión, usemos indistintamente $T(\alpha)$ e $\vec{Y}$ por un lado y $\vec{X}$ y α por otro.

Ejemplo 9.5

En el espacio R^2 consideremos la aplicación T que hace rotar cada vector $\alpha = (a_1, a_2)$ en un angulo ϕ en sentido contrario a los punteros del reloj, en torno al origen.



Facilmente se muestra que esta aplicación T es lineal. Determinaremos una matriz de T.

Tomemos en R^2 la base formada por $\xi_1 = (1,0)$ y $\xi_2 = (0,1)$ que rotados en un angulo ϕ se transforman en η_1 y η_2 respectivamente. Entonces:

$$\eta_1 = (\cos\phi)\xi_1 + (\operatorname{sen}\phi)\xi_2$$

$$\eta_2 = (-\operatorname{sen}\phi)\xi_1 + (\cos\phi)\xi_2$$

Asi, si $\alpha = (a_1, a_2) \in R^2$ y rotado en un ángulo ϕ se convierte en $\beta = (b_1, b_2)$, tenemos:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Particularmente para ξ_1 y ξ_2 tenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

Asi la matriz representativa de T con referencia a la base usual, es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Ejemplo 9.6

Sea P^2 el espacio de los polinomios de grado no superior a 2 y P^1 el de los polinomios de grado no superior a 1. Se toma en P^2 la base $B_1 = \{1, t, t^2\}$ y en P_1 la base $B_2 = \{t, 1\}$. Se define la transformación T de P^2 a P^1 por: $T(p(t)) = p^1(t)$. Determinar la matriz A a T con referencia a las bases B_1 y B_2 dadas.

Solución

Si dificultad se demuestra que la transformación es lineal. Además:

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 = 0.\ t + 0.1 \\ T(t) &= 1 = 0.\ t + 1.1 \\ T(t^2) &= 2t = 2.\ t + 0.1 \end{aligned} \qquad \text{Asi } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tomando en P_2 el polinomio: $p(t) = 3t^2 - 5t + 7$, tenemos: $p'(t) = 6t - 5$. Ahora usando la matriz A a T resulta:

$$T(p(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = (6, -5) = 6t - 5$$

Observación

Llamamos la atención sobre la importancia que tie ne el orden en que están dados los elementos de las bases

B_1 y B_2. Si dicho orden cambia, es inmediato que la matriz A de T también cambia en general.

Observación

Para obtener la matriz de una transformación lineal $T: V \to W$, referida V a la base B_1 y W a la base B_2 se aplica T a cada uno de los elementos de la base B_1 de V y se expresa los vectores obtenidos, en términos de los elementos de la base B_2 de W. Finalmente la matriz A de T se obtiene tomando como columnas para A los transformados de los vectores de la base B_1

TEOREMA 9.3

Si S y T son transformaciones lineales de $V \to W$, también lo son las aplicaciones:

a). $(S+T)(\alpha) = S(\alpha) + T(\alpha) \qquad \forall\, \alpha \in V$

b). $(a\,T)(\alpha) = a\,T(\alpha) \qquad \forall\, \alpha \in V \wedge a \in K$

Dm

Trivial. Se deja como ejercicio.

Corolario

Si A y B son las matrices de S y T con respecto a las bases $\{\alpha_j\}$ y $\{\beta_i\}$, se tiene:

$$(S+T)(\alpha) = (A+B)\,\alpha$$

$$(a\,T)(\alpha) = (a\,A)\,\alpha$$

TEOREMA 9.4

El conjunto Hom(V,W) con las operaciones: $(S+T)(\alpha)$ y $(aT)(\alpha)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo K asociado a los espacios V y W.

Dm

Desde luego el conjunto Hom(V,W) no es vacio, pues contiene la transformación lineal $O(\alpha) = \theta_W$, $\forall\ \alpha \in V$. El resto de la demostración se reduce a establecer que los elementos de Hom (V,W) verifican la axiomática que define un espacio vectorial y ello es trivial.

Corolario

Si V es de dimensión n y W de dimensión m, el espacio vectorial Hom(V,W) tiene dimensión m x n.

TEOREMA 9.5

Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre un cuerpo K. Sea $T : V \rightarrow W$ y $S: W \rightarrow Z$, entonces la aplicación :

$(ST)(\alpha) = S(T(\alpha))$ $\quad \forall\ \alpha \in V$, cuando existe, es transformación lineal de V a Z.

Dm

Trivial. Se deja como ejercicio.

Corolario

Si A y B son las matrices de S y T con respecto a las bases $\{\alpha_j\}$ y $\{\beta_i\}$, se tiene: $(ST)(\alpha) = (AB)\alpha$.

TEOREMA 9.6

Sea $T \in Hom(X,Y)$, $S \in Hom(Y,Z)$ y $R \in Hom(Z,W)$, tales que ST y RS existen, entonces $R(ST)$ y $(RS)T$ existen y además: $R(ST) = (RS)T$.

Dm

La aplicación ST vá desde el recorrido de T al recorrido de S. Ahora como RS existe, el recorrido de S debe estar en el dominio de R, así R(ST) está definida.

Por otra parte como (ST) existe, ocurre que T es una aplicación cuyo recorrido está en el dominio de S; además (RS) es una función cuyo dominio es el dominio de S, entonces (RS)T existe.

Finalmente por definición de composición, para todo $\alpha \in X$, tenemos:

$$(R(ST))(\alpha) = R((ST)(\alpha)) = R(S(T(\alpha)))$$

$$((RS)T)(\alpha) = (RS)(T(\alpha)) = R(S(T(\alpha)))$$

Así tenemos que el producto de transformaciones lineales es asociativo, por ello será usual la notación: RST en lugar de: $R(ST) = (RS)T$.

Corolario

Si A, B y C son las matrices de R, S y T con respec to a las bases $\{\alpha_j\}$ $\{\beta_i\}$, y $\{\gamma_k\}$ se tiene: $(RST)(\alpha) = (ABC)\alpha$

TEOREMA 9.7

Para toda $T \in Hom(V,W)$ se tiene: $T(\theta_V) = \theta_W$

Dm

Como T es transformación lineal, tomado $\alpha \in V$, tenemos:

$$T(\theta_V) = T(0\alpha) = 0\ T(\alpha) = \theta_W.$$

DEF. 9.2

Dada $T \in Hom(V,W)$, se llama imagen de T, al conjunto:

$$Im(T) = \{\omega \in W \mid \omega = T(\alpha) \quad con\ \alpha \in V\}$$

TEOREMA 9.8

Sea $T \in Hom(V,W)$, entonces:

$$A < V \quad \text{implica} \quad T(A) < W$$

Dm

Como A es subespacio de V, tenemos: $\theta_V \in A$ y como $T(\theta_V) = \theta_W$, resulta: $T(A) \neq \phi$ (1)

Por otra parte tomados $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$ en $T(A)$, existen α y β en A, de modo que: $T(\alpha) = \overline{\alpha}$ y $T(\beta) = \overline{\beta}$

Ahora como $A < V$, $\alpha \in A$ y $\beta \in A$, implica $(\alpha + \beta) \in A$ y entonces $T(\alpha + \beta) \in T(A)$, así:

$$(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = T(\alpha) + T(\beta) = T(\alpha + \beta) \in T(A) \qquad (2)$$

Finalmente sea $\overline{\alpha} \in T(A)$ y $a \in K$, entonces como hay $\alpha \in A$, tal que $T(\alpha) = \overline{\alpha}$, tenemos: $a\,\alpha \in A$ y $T(a\,\alpha) \in T(A)$, así:

$$a\overline{\alpha} = a\,T(\alpha) = T(a\,\alpha) \in T(A) \qquad (3)$$

Resumiendo tenemos que las expresiones (1), (2) y (3) aseguran que $T(A)$ es un subespacio de W, o sea: $T(A) \quad W$.

<u>Corolario</u>

$$Im(T) < W$$

En efecto: $Im\ T = T(V)$ y además $V < V$.

<u>DEF</u> 9.3

Se llama rango de una transformación lineal T, a la dimensión r del subespacio $Im(T)$:

$$r(T) = \dim(ImT)$$

<u>DEF</u> 9.4

Dada $T \in Hom(V,W)$, se llama núcleo de T,

$$Ker(T) = \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = \theta_W\}$$

<u>TEOREMA</u> 9.9

Sea $T \in Hom(V, W)$, entonces: $A < W$ implica : $T^{-1}(A) < V$, donde $T^{-1}(A)$ es la pre-imagen de A.

<u>Dm</u>

Como $A < W$, tenemos $\theta_W \in A$ y como $T(\theta_V) = \theta_W$, resulta $\theta_V \in T^{-1}(A)$, así: $T^{-1}(A) \neq \phi \qquad (1)$

Ademas tomados α y β en la pre-imagen $T^{-1}(A)$ existen $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ en la imagen $A < W$, tales que: $\bar{\alpha} = T(\alpha)$ y $\bar{\beta} = T(\beta)$ y como A es subespacio, tenemos:

$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta) = (\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \in A$ o sea:

$$(\alpha + \beta) \in T^{-1}(A) \qquad (2)$$

Finalmente tomado $a \in K$, tenemos:

$T(a\ \alpha) = a\ T(\alpha) = a\ \bar{\alpha} \in A$

pues $\bar{\alpha} \in A$ y ademas $A < W$, así: $a\alpha \in T^{-1}(A)$ (3)

Las expresiones (1), (2) y (3) aseguran que la pre-imagen $T^{-1}(A)$ es subespacio de V, cuando $A < W$.

<u>Corolario</u>

$$\text{Ker}(T) < V$$

En efecto $\text{Ker}(T) = T^{-1}(\theta_W)$ y además $\{\theta_W\} < W$.

<u>DEF</u> 9.5

Se llama nulidad de una transformación lineal T, a la dimensión n, del subespacio: Ker(T):

$$n(T) = \dim(\text{Ker } T)$$

<u>TEOREMA</u> 9.10

Sea $T \in \text{Hom}(V,W)$, entonces T es inyectiva si y sólo si: $\text{Ker}(T) = \{\theta_V\}$.

<u>Dm</u>

Supongamos primero que T es aplicación uno-a-uno. Conside-

rando que: $T(\theta_V) = \theta_W$, resulta: $\quad Ker(T) = \{\theta_V\}$
pues $\alpha \in V$ con $\alpha \neq \theta_V$, implica $T(\alpha) \neq T(\theta_V) = \theta_W$, o sea $\alpha \notin Ker(T)$.

Reciprocamente supongamos $Ker(T) = \{\theta_V\}$. Tomando α y β en V con $\alpha \neq \beta$ tenemos $\alpha - \beta \neq \theta_V$ y entonces $T(\alpha - \beta) \neq \theta_W$ luego:

$$\theta_W \neq T(\alpha - \beta) = T(\alpha) - T(\beta)$$

o sea

$$\alpha \neq \beta \quad \text{implica} \quad T(\alpha) \neq T(\beta)$$

es decir T es aplicación inyectiva.

<u>TEOREMA</u> 9.11

Una $T \in Hom(V,W)$ transforma conjuntos linealmente independientes de V en conjuntos linealmente independientes de W, si y solo si: $Ker\ T = \{\theta_V\}$.

<u>Dm</u>

Se deja como ejercicio .

<u>DEF</u> 9.6

Una $T \in Hom(V,W)$ es:

a) Monomorfismo si y solo si: $Ker(T) = \{\theta_V\}$

b) Epinorfismo si y solo si: $Im(T) = W$

c) Isomorfismo si y solo si es monomorfismo y epimorfismo

DEF 9.7

Dos espacios vectoriales V y W son isomorfos ($V \sim W$) si y solo si existe un isomorfismo T de V a W.

TEOREMA 9.12

Sean V y W espacios de dimensiones finitas. Entonces, dim V = dim W, si y solo si V y W son isomorfos.

Dm

Se deja como ejercicio.

Corolario 1

Cada espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo k es isomorfo con el espacio K^n.

Corolario 2

Sea $T \in Hom(V, W)$ con V y W de dimensiones finitas, entonces T es isomorfismo si y solo si la imagen de una base de V es base de W.

TEOREMA 9.13

Sea V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T \in Hom(V, W)$, entonces:

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\ T) + \dim(\mathrm{Im}\ T).$$

Dm

Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ una base para el núcleo Ker T y sea

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q\}$ una base para V.

Mostraremos que $\{T(\beta_1), T(\beta_2), \ldots, T(\beta_q)\}$ es una base para el espacio: Im T. Veamos primero como estos vectores generan el espacio Im T. Tomado arbitrariamente $\xi \in$ Im T, existe $\alpha \in V$, tal que: $T(\alpha) = \xi$. Ahora como $\alpha \in V$ tenemos:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{p} a_j \alpha_j + \sum_{k=1}^{q} b_k \beta_k$$

luego:

$$\xi = T(\alpha) = \sum_{j=1}^{p} a_j T(\alpha_j) + \sum_{k=1}^{q} b_k T(\beta_k)$$

y como $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ es base de Ker T, resulta:

$$\xi = T(\alpha) = \sum_{k=1}^{q} b_k T(\beta_k)$$

es decir el conjunto $T(\beta_1), T(\beta_2), \ldots, T(\beta_q)$ genera el espacio: Im T. Para probar que este conjunto es base, só lo falta mostrar que sus elementos son linealmente indepen dientes. Tomada una relación lineal entre ellos:

$$\sum_{j=1}^{q} c_j T(\beta_j) = \theta_w \quad \text{resulta:} \quad T\left(\sum_{j=1}^{q} c_j \beta_j\right) = \theta_w$$

o sea: $\left(\sum_{j=1}^{q} c_j \beta_j\right) \in$ Ker T.

Siendo $\sum_{j=1}^{q} c_j \beta_j$ un elemento del núcleo, podrá expresarse como una combinación lineal de la base de dicho núcleo, así tenemos:

$$\sum_{j=1}^{q} c_j \ \beta_j = \sum_{k=1}^{p} h_k \ \alpha_k$$

o sea:

$$h_1 \ \alpha_1 + h_2 \ \alpha_2 + \dots + h_p \ \beta_p - c_1 \ \beta_1 - c_2 \ \beta_2 \dots\dots - c_q \ \beta_q = \theta_V$$

y como los vectores $\{\alpha_1, \ \alpha_2 \dots \ \alpha_p, \ \beta_1 \ \beta_2 \dots \ \beta_q\}$ son linealmente independientes, concluimos que:

$$h_1 = h_2 = \dots = h_p = c_1 = c_2 = \dots\dots = c_q = 0$$

resultado que nos garantiza la independencia lineal de $T(\beta_1)$, $T(\beta_2), \dots\dots T(\beta_q)$. Siendo este conjunto base para Im T, resulta: dim(Im T) = q y como: dim(Ker T) = p , concluimos:

dim V = p + q = dim(Ker T) + dim(Im T).

<u>Corolario</u>

Sea $T \in$ Hom(V, W) con V,W finito dimensionales, entonces:

a) T inyectiva, implica: dim V $\leq$ dim W.

b) T sobreyectiva, implica: dim V $\geq$ dim W

c) T biyectiva, implica: dim V = dim W.

<u>DEF</u> 9.8

Un homomorfismo $T : V \to W$ es no-singular o invertible si y solo si, existe una aplicación T°: Im(T) sobre V, tal que: $T°T = I_V$, donde I_V es el homomorfismo identidad en V.

TOEREMA 9.14

Si $T \in$ Hom (V,W) es invertible, T es inyectiva.

Dm

Tomemos α y β en V, tales que $T(\alpha) = T(\beta)$, entonces como T es invertible, existe T°, luego: $T(\alpha) = T(\beta)$ implica

$T°(T(\alpha)) = T°(T(\beta))$

o sea:

$$(T°T)(\alpha) = (T°T)(\beta)$$

$$I_V(\alpha) = I_V(\beta) \quad \text{es decir } \alpha = \beta$$

Así, T no singular, implica T inyectiva.

TEOREMA 9.15

Si $T \in$ Hom (V,W) es invertible se tiene: $TT° = I_W$ sobre Im(T).

Dm

Tomado $\overline{\alpha} \in$ Im(T), existe un único elemento $\alpha \in V$, tal que $T(\alpha) = \alpha$, Además:

$$(TT°)(\overline{\alpha}) = (T\ T°)(T(\alpha)) = T\ (T°T)(\alpha)$$

$$= T(I_V(\alpha)) = T(\alpha) = \overline{\alpha} = I_W(\overline{\alpha})$$

Así para cada $\overline{\alpha} \in$ Im(T), tenemos: $TT° = I_W$.

<u>TEOREMA</u> 9.16

Si $T \in Hom(V,W)$ es invertible, la aplicación $T°$ es lineal y única.

<u>Dm</u>

Tomando $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$ en Im(T), existen únicos α y β en V, tales que: $T(\alpha) = \overline{\alpha}$ y $T(\beta) = \overline{\beta}$, entonces considerando que:

$$\alpha = I_V(\alpha) = (T°T)(\alpha) = T°\ (T(\alpha)) = T°(\overline{\alpha})$$

$$\beta = I_V(\beta) = (T°T)(\beta) = T°\ (T(\beta)) = T°(\overline{\beta})$$

resulta:

$$\begin{aligned} T°(a\,\overline{\alpha} + b\,\overline{\beta}) &= T°(aT(\alpha) + bT(\beta)) \\ &= (T°T)(a\,\alpha + b\,\beta) = I_V\ (a\,\alpha + b\,\beta) \\ &= a\,\alpha + b\,\beta = a\,T°(\overline{\alpha}) + b\,T°(\overline{\beta}) \end{aligned}$$

Igualdad que prueba que $T°$ es aplicación lineal de Im(T) sobre V.

Mostraremos ahora que $T°$ es única para cada $T \in Hom(V,W)$. Supongamos que a $T \in Hom(V,W)$ coresponda dos inversos $T_1°$ y $T_2°$, entonces: para cualquier $\overline{\alpha} \in Im(T)$, tenemos:

$$\begin{aligned} T_1°(\overline{\alpha}) = I_V\ T_1°(\overline{\alpha}) &= (T_2°\ T)\ T_1°(\overline{\alpha}) = T_2°(T\ T_1°)(\overline{\alpha}) \\ &= (T_2°(I_W(\overline{\alpha})) = T_2°(\overline{\alpha}) \end{aligned}$$

Igualdad que nos muestra que $T°$ es única para cada $T \in Hom$ (V, W).

<u>Observación</u> 1

El teorema precedente nos muestra que si T es no singular, existe una única transformación lineal T°, tal que: $T^\circ T = I_V$ y $TT^\circ = I_W$

o sea, que es recíproca de T por la izquierda y por la derecha. Esta única transformación lineal T°, la llamaremos inversa de T y la designaremos por T^{-1}.

Observación 2

La no singularidad de T expresada por: $T^{-1}T = I_V$ y $TT^{-1} = I_W$ lleva implícita la no singularidad de T^{-1} que se expresa por las mismas igualdades.

TEOREMA 9.17

Sea $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ y $\dim V = n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a). T es no singular

b). $\mathrm{Ker}(T) = \{\theta_V\}$

c). $n(T) = 0$

d). $r(T) = n$

e). T transforma bases de V en bases de $\mathrm{Im}(T)$

Dm

(a) $\rightarrow$ (b). Como T es no singular, ella es inyectiva, entonces por teorema 9.10, tenemos: $\mathrm{Ker}(T) = \{\theta_V\}$

(b) $\rightarrow$ (c). Como $n(T) = \dim \mathrm{Ker}(T)$ y $\ker(T) = \{\theta_V\}$, resulta $n(T) = 0$.

(c) $\rightarrow$ (d). Aprovechando la igualdad dim V = dim (Im T) + + dim (Ker(T)), como dim(Ker T) = 0, resulta dim(Im T) = r (T) = n

(d) $\rightarrow$ (e). Como dim (Im T) = n, toda base para Im(T) está constituida por n vectores linealmente independientes. Ahora como Ker(T) = $\{\theta_V\}$, T transforma toda base de V, en n vectores linealmente independientes de Im(T), o sea en una base para Im(T).

(e) $\rightarrow$ (a). Sea $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ una base para V, entonces $\{T(\alpha_1), T(\alpha_2), \ldots, T(\alpha_n)\}$ es base para Im(T). Así cada $\omega \in$ Im T se expresa en la forma:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j \; T(\alpha_j)$$

Definamos una aplicación lineal T* de Im(T) sobre V, por la expresión:

$$T^* \; (\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_j \; \alpha_j$$

Haremos ver que $T^*T = I_V$. Tomado arbitrariamente $\alpha \in V$, tendremos:

$$\alpha = \sum_{1}^{n} x_j \; \alpha_j \qquad \wedge \qquad T(\alpha) = \sum_{1}^{n} x_j \; T(\alpha_j)$$

entonces, de acuerdo a la definición de T*, resulta:

$$T^* \ (T(\alpha)) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ \alpha_j = \alpha = I_V(\alpha)$$

luego $T^*T = I_V$ y entonces T es homomorfismo no-singular.

TEOREMA 9.18

Sean S y T homomorfismo no singulares de V a V, entonces:

a) $(TS)^{-1} = S^{-1} \ T^{-1}$

b) $(c\,T)^{-1} = \frac{1}{c} T^{-1} \qquad \forall \ c \neq 0$

c) $(T^{-1})^{-1} = T$

Dm

a) De inmediato tenemos que:

$(TS)(S^{-1}T^{-1}) = T(SS^{-1}) \ T^{-1} = TT^{-1} = I.$

Asi tenemos que la inversa $(TS)^{-1}$ de TS existe, y como ella es única, resulta $(TS)^{-1} = S^{-1} \ T^{-1}$.

b) Analogamente para todo $c \neq 0$, se tiene:

$(cT)(\frac{1}{c} \ T^{-1}) = (cc^{-1})(TT^{-1}) = 1I = I$

Asi la inversa $(cT)^{-1}$ de (cT) existe, y como ella es única obtenemos: $(cT)^{-1} = c^{-1} \ T^{-1}$

c) Como T es no-singular existe T^{-1}, tal que: $T^{-1}T = TT^{-1} = I.$

Asi resulta que T^{-1} también es no-singular y su inversa es T. Ahora como tal inversa es única, resulta $(T^{-1})^{-1} = T.$

Observación 1

Sea V un espacio vectorial n-dimensional, $\{\alpha_j\}_1^n$ y $\{\beta_j\}_1^n$ dos bases ordenadas para V. Tomando un vector cualquiera $\alpha \in V$, sabemos que él admite una y sólo una expresión:

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \ldots\ldots + x_n \alpha_n$$

en términos de la base $\{\alpha_j\}$ y una y sólo una expresión:

$$\alpha = y_1 \beta_1 + y_2 \beta_2 + \ldots\ldots + y_n \beta_n$$

en términos de la base $\{\beta_j\}$. Con el propósito de establecer la relación que existe entre los vectores-coordenadas:

$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots. x_n)$ e $\vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots\ldots y_n)$

del vector α, introduciremos una matriz $P = (p_{ij})$, llamada matriz de paso de la base $\{\alpha_j\}$ a la base $\{\beta_j\}$.

DEF 9.9

Sea V un espacio n-dimensional, $\{\alpha_j\}_1^n$ y $\{\beta_j\}_1^n$ dos bases ordenadas para V, entonces si:

$$\alpha_1 = p_{11} \beta_1 + p_{12} \beta_2 + \ldots\ldots + p_{1n} \beta_n$$

$$\alpha_2 = p_{21} \beta_1 + p_{22} \beta_2 + \ldots\ldots + p_{2n} \beta_n$$

$$\alpha_3 = p_{31} \beta_1 + p_{32} \beta_2 + \ldots\ldots + p_{3n} \beta_n$$

$$\alpha_n = p_{n1} \beta_1 + p_{n2} \beta_2 + \ldots\ldots + p_{nn} \beta_n$$

llamaremos matriz de paso de la base $\{\alpha_j\}$ a la base $\{\beta_j\}$, a la matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots\cdots\cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots\cdots\cdots & p_{n2} \\ p_{13} & p_{23} & \cdots\cdots\cdots & p_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & & p_{nn} \end{pmatrix} = (p_{ij})$$

Observación 2

La matriz $P = (p_{ij})$ es matriz n-singular. En efecto la independencia lineal de los vectores α_i, implica la independencia lineal de sus vectores cordinados

$\vec{X}_i = (p_{i1}\ p_{i2} \ \cdots\cdots\ p_{in})$.

TEOREMA 9.19

Sea V espacio n-dimensional, $P = (p_{ij})$ la matriz de paso de la base $\{\alpha_j\}_1^n$ a la base $\{\beta_j\}_1^n$. Si $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ son los vectores coordenados de $\alpha \in V$ en las bases $\{\alpha_j\}$ y $\{\beta_j\}$, tenemos: $\vec{Y} = P\vec{X}$.

Dm

Por hipotesis tenemos que:

$$\alpha = x_1\ \alpha_1 + x_2\ \alpha_2 + \cdots\cdots + x_n\ \alpha_n$$

$$\alpha = y_1\ \beta_1 + y_2\ \beta_2 + \cdots\cdots + y_n\ \beta_n$$

$$\alpha_i = p_{i1}\beta_1 + p_{i2}\beta_2 + \cdots\cdots + p_{in}\ \beta_n \qquad i = 1,2,\ldots\ldots, n.$$

luego:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \, (\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \, \beta_j)$$

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} x_i \, p_{ij}) \, \beta_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \, \beta_j$$

De donde:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \, x_i \qquad j = 1,2,3,\ldots\ldots,n$$

O sea:

$$\begin{array}{l} y_1 = p_{11} x_1 + p_{21} x_2 + \ldots + p_{n1} x_n \\ y_2 = p_{12} x_1 + p_{22} x_2 + \ldots + p_{n2} x_n \\ \hline \\ y_n = p_{1n} x_1 + p_{2n} x_2 + \ldots + p_{nn} x_n \end{array}$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \ldots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \ldots & p_{n2} \\ -- & -- & -- & -- \\ p_{1n} & p_{2n} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -- \\ x_n \end{pmatrix}$$

Igualdad que demuestra la tesis propuesta: $\vec{Y} = P \, \vec{X}$

<u>Corolario 1</u>

Si P es la matriz de paso de la base $\{\alpha_j\}$ a la base $\{\beta_j\}$, la matriz de paso de $\{\beta_j\}$ a $\{\alpha_j\}$ es P^{-1}.

En efecto, tenemos: $\vec{Y} = P\,\vec{X}$ y como P es matriz no-singular, existe P^{-1}. Entonces $\vec{X} = P^{-1}\,\vec{Y}$.

Corolario 2

Si P es la matriz de paso de $\{\alpha_j\}$ a $\{\beta_j\}$ y Q es la matriz de paso de $\{\beta_j\}$ a $\{\gamma_j\}$, la matriz de paso de $\{\alpha_j\}$ a $\{\gamma_j\}$ es: QP

En efecto, de inmediato tenemos:

$\vec{Y} = P\vec{X}$ y $\vec{Z} = Q\vec{Y}$, luego: $\vec{Z} = QP\vec{X}$

Ejemplo 9.7

En el espacio P^2 de los polinomios de grado no superior a dos, se considera las bases: $\{1, t, t^2\}$ y $\{6t^2, t, 4\}$. Dado el vector $\alpha = 3t^2 + 5t - 8$, se pide determinar los vectores-coordenadas $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ de α, en dichas bases y la matriz P de paso de la base $\{1, t, t^2\}$ a la base $\{6t^2, t, 4\}$.

Solución

Es inmediato que el vector $\alpha = 3t^2 + 5t - 8$, corresponde en la base $\{1, t, t^2\}$ el vector-coordenada $\vec{X} = (-8,5,3)$, pues:

$$\alpha = (-8\ \ 5\ \ 3)\begin{pmatrix}1\\t\\t^2\end{pmatrix} = -8 + 5t + 3t^2$$

Analogamente, considerando que:

$$\alpha = (1/2\ ,\ 5\ ,\ -2)\begin{pmatrix} 6t^2 \\ t \\ 4 \end{pmatrix} = 3t^2 + 5t - 8$$

vemos que el vector-coordenada $\vec{Y}$ de α en la base $\{6t^2, t, 4\}$ es $\vec{Y} = (1/2\ ,\ 5, -2)$.

Para determinar la matriz de paso de la base: $\{1, t, t^2\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ a la base $\{6t^2, t, 4\} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ basta aplicar la definición 9.9. De acuerdo a ella tenemos:

$$\alpha_1 = 1 = 0\ \beta_1 + 0\ \beta_2 + \frac{1}{4}\ \beta_3$$

$$\alpha_2 = t = 0\ \beta_1 + 1\ \beta_2 + 0\ \beta_3$$

$$\alpha_3 = t^2 = \frac{1}{6}\ \beta_1 + 0\ \beta_2 + 0\ \beta_3$$

de donde resulta que la matriz de paso búscada es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente verificaremos que: $\vec{Y} = P\ \vec{X}$. De inmediato tenemos:

$$P\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{Y}$$

<u>TEOREMA</u> 9.20

Sea $\{\alpha_j\}^n$, una base ortonormal para el espacio V sobre $\mathbb{R}$ y P la matriz de paso de la base $\{\alpha_j\}$ a una base $\{\beta_j\}$, entonces la base $\{\beta_j\}$ es ortonormal si y solo si la matriz P es ortogonal.

<u>Dm</u>

Supongamos primero que la base $\{\beta_j\}$ también es ortonormal. Entonces aprovechando que: $(\alpha_i|\alpha_j) = (\beta_i|\beta_j) = \delta_{ij}$ tenemos:

$(\alpha_i|\alpha_j) = (p_{i1}\,\beta_1 + p_{i2}\,\beta_2 + \dots + p_{in}\,\beta_n|\ p_{j1}\,\beta_1 +$

$+ p_{j2}\,\beta_2 + \dots + p_{jn}\,\beta_n).$

o sea:

$$\delta_{ij} = p_{i1}\,p_{j1} + p_{i2}\,p_{j2} + \dots + p_{in}\,p_{jn}$$

que nos garantiza que la matriz $P = (p_{ij})$ es ortogonal.

Reciprocamente supongamos que P es matriz ortogonal. Como la matriz de paso de la base $\{\beta_j\}$ a la base $\{\alpha_j\}$ es P^{-1}, siendo P ortogonal, dicha matriz es $P^{-1} = P^t$, entonces:

$$\beta_1 = p_{11}\,\alpha_1 + p_{21}\,\alpha_2 + \dots + p_{n1}\,\alpha_n$$

$$\beta_2 = p_{12}\,\alpha_1 + p_{22}\,\alpha_2 + \dots + p_{n2}\,\alpha_n$$

$$\beta_n = p_{1n}\,\alpha_1 + p_{2n}\,\alpha_2 + \dots + p_{nn}\,\alpha_n$$

y como $(\alpha_i|\alpha_j) = \delta_{ij}$, resulta:

$$(\beta_i | \beta_j) = p_{1i}\, p_{1j} + p_{2i}\, p_{2j} + \dots + p_{ni}\, p_{nj} = \delta_{ij}$$

Asi la base $\{\beta_j\}$ es ortonormal.

<u>Corolario</u> 1

Si el espacio V se toma sobre el cuerpo C de los complejos, la matriz de paso P es unitaria.

<u>Corolacio</u> 2

El producto interior $(\alpha|\beta)$ es invariante a un cambio de bases ortonormales.

En efecto, sea P la matriz de paso de una base ortonormal a otra base ortonormal. Sean $\dot{\alpha}$ y $\dot{\beta}$ los transformados de α y β, entonces:

$$(\dot{\alpha}|\dot{\beta}) = (P\alpha \mid P\beta) = (\alpha|P^{*}P\beta) = (\alpha|\beta).$$

<u>Ejemplo</u> 9.8

En el espacio R^3 se considera las bases ortonormales:

$$\alpha_1 = (1,0,0) \qquad \alpha_2 = (0,1,0) \qquad \alpha_3 = (0,0,1)$$

y

$$\beta_1 = (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},0) \qquad \beta_2 = (-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},0)$$

$$\beta_3 = (0,0,1)$$

Se pide determinar la matriz de paso P, de la base $\{\alpha_i\}$ a la base $\{\beta_j\}$ y dado $\omega = (3,1,5)$ en la primera base, expre sarlo en términos de la otra base.

Solución

Procediendo de idéntica forma, a la indicada en el ejercicio anterior, se encuentra:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz que es ortonormal, pues $PP^t = I$. Entonces el vector $\omega = (3,1,5)$ dado referido a la base estandar $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, queda expresado en la base $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ por:

$$\omega = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 5 \end{pmatrix}$$

Es decir tenemos:

$$(3,1,5) = \omega = 2\sqrt{2}\ \beta_1 - \sqrt{2}\ \beta_1 + 5\ \beta_3$$

$$(3,1,5) = \omega = 2\sqrt{2}\ (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) - \sqrt{2}(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) + 5(0,0,1)$$

$$(3,1,5) = \omega = (2,2,0) + (1,-1,0) + (0,0,5) = (3,1,5)$$

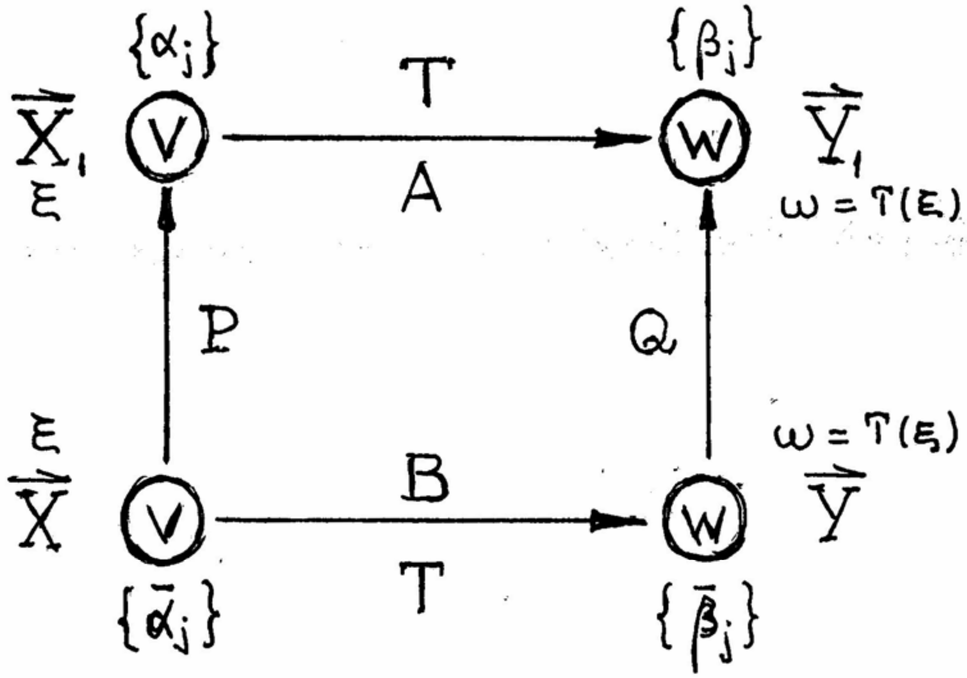
TEOREMA 9.21

Sea $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ que referido a las bases $\{\alpha_j\}^n$, para V y $\{\beta_j\}^m$, para W, se expresa por la matriz A y referido a las base $\{\overline{\alpha}_j\}^n$, para V y $\{\overline{\beta}_j\}^m$, para W se expresa por la matriz B. Si P es la matriz de paso de $\{\overline{\alpha}_j\}$ a $\{\alpha_j\}$ y Q

de $\{\bar\beta_j\}$ a $\{\beta_j\}$, se tiene: $B = Q^{-1} AP$.

<u>Dm</u>

Sea ξ un vector cualquiera de V y $\omega = T(\xi)$. Sea $\vec{X}$ el vector coordenada de ξ en la base $\{\bar\alpha_j\}$, y $\vec{X}_1$ su vector coordenada en la base $\{\alpha_j\}$, entonces $\vec{X}_1 = P\vec{X}$. Sea $\vec{Y}$ el vector coordenada de ω en la base $\{\bar\beta_j\}$ e $\vec{Y}_1$ su vector coordenada en la base $\{\beta_j\}$, entonces $\vec{Y}_1 = Q\,\vec{y}$



Ahora, considerando que: $\vec{Y}_1 = A\vec{X}_1$, tenemos: $Q\vec{Y} = AP\vec{X}$, luego: $\vec{Y} = (Q^{-1}\,A\,P)\vec{X}$, pero como $\vec{Y} = B\vec{X}$, resulta: $B = Q^{-1}\,AP$.

<u>Corolario 1</u>

Sea $T \in Hom(V,V)$ que referido a la base $\{\bar\alpha_j\}^n$, se expresa por A y referido a la base $\{\alpha_j\}^n$, se expresa por B. Si P es la matriz de paso de la base $\{\bar\alpha_j\}$ a la base

$\{\alpha_j\}$, tenemos: $B = P^{-1} AP$.

Corolàrio 2

Dos matrices A y B son similares sii, representan un mismo homomorfismo $T \in Hom(V,V)$, en dos bases ordenadas diferentes.

Ejemplo 9.9

Sea T una transformación lineal del espacio P^2 al espacio P^1, definida por $T(p(t)) = p'(t)$. Sean $\{\alpha_j\} = \{t^2, t. 1\}$ y $\{\overline{\alpha}_j\} = \{1, t, t^2\}$ bases para P^2 y $\{\beta_j\} = \{t, 1\}$ y $\{\overline{\beta}_j\} = \{t + 1, t - 1\}$ bases para P^1. Se pide:

a) Matriz A de T, de $\{\alpha_j\}$ a $\{\beta_j\}$

b) Matriz B de T, de $\{\overline{\alpha}_j\}$ a $\{\overline{\beta}_j\}$

c) Matriz de paso P de $\{\overline{\alpha}_j\}$ a $\{\alpha_j\}$

d) Matriz de paso Q de $\{\overline{\beta}_j\}$ a $\{\beta_j\}$

e) Verificar que: $B = Q^{-1} A P$

Solución:

a) Determinación de A. De inmediato tenemos:

$T(t^2) = 2t = 2t + 0.1$

$T(t) = 1 = 0.t + 1.1$ Así: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T(1) = 0 = 0.t + 0.1$

b) Determinación de B.

$T(1) = 0 = 0.(t + 1) + 0.(t - 1)$

$$T(1) = 1 = \frac{1}{2}(t + 1) - \frac{1}{2}(t - 1) \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(t^2) = 2t = 1.(t + 1) + 1.\ (t - 1)$$

c) Determinación de P. Se expresan los vectores de la base $\{\overline{\alpha}_j\}$ en términos de la nueva base $\{\alpha_j\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= 0.t^2 + 0.t + 1.1 \\ t &= 0.t^2 + 1.t + 0.1 \\ t^2 &= 1.t^2 + 0.t + 0.1 \end{aligned} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Determinación de Q. Es analogo a lo hecho en el punto anterior.

$$\begin{aligned} t + 1 &= 1.t + 1.1 \\ t - 1 &= 1.t - 1.1 \end{aligned} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e) Verificación de : $B = Q^{-1} A P$.

Dada $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ se encuentra $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Entonces:

$$Q^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>DEF</u> 9.10

Un escalar t es valor propio de $T \in Hom(V,V)$ si y solo si existe un vector no nulo $\alpha \in V$, tal que $T(\alpha) = t\,\alpha$. El vector α es entonces un vector propio de T.

Ejemplo 9.10

Sea $T \in Hom(R^2, R^2)$ definido por: $T(x,y) = (y,x)$.

Entonces para cada $a \neq 0$, tenemos que:

$$T(a,a) = (a,a) = 1(a,a)$$

igualdad que nos muestra que 1 es valor propio de T y (a,a) es vector propio.

También:

$$T(a,-a) = (-a,a) = (-1)\ (a,-a)\ (a,-a)$$

y entonces (-1) es valor propio y (-a,a), con $a \neq 0$, es vector propio de T.

TEOREMA 9.22

Sea $T \in Hom(V,V)$ y A la matriz de T en una base $\{\alpha_j\}^n$,. Entonces un escalar $t \in K$ es valor propio de T si y solo si t es valor propio de A.

Dm

Sea $t \in K$ valor propio de T, entonces existe $\alpha \in V$, con $\alpha \neq \theta$, tal que $T(\alpha) = t\ \alpha$. Llamando $\vec{X}$ al vector-coordenada de α en la base $\{\alpha_j\}$ e $\vec{Y}$ el vector-coordenada de $T(\alpha)$ en dicha base, tenemos:

$$T(\alpha) = t\alpha \qquad \text{sii} \qquad \vec{Y} = t\vec{X}$$

Ahora como $A\vec{X} = \vec{Y}$, resulta:

$$T(\alpha) = t\alpha \qquad \text{sii} \qquad A\vec{X} = T\vec{X}$$

Ademas el isomorfismo de V y K^n nos garantiza que $\vec{X} \neq \vec{0}$, pues $\alpha \neq \theta$. Así queda probada la tesis.

Corolario

Un vector $\alpha \neq \theta$ es vector propio de T si y solo si, su vector-coordenada $\vec{X}$ es vector propio de la matriz A de T.

Ejemplo 9.11

Para la aplicación T de P^2 a P^2, definida por: $T(at^2 + bt + c) = (2a + b + c)t^2 + (2c - 3b)t + 4c$ se pide determinar sus valores y sus vectores propios.

Solución

Primero buscaremos la matreiz A de T en una base, tomaremos la base $\{1, t, t^2\}$, entonces tenemos:

$$T(1) = t^2 + 2t + 4 = 4.1 + 2.t + 1.t^2$$

$$T(t) = t^2 - 3t + 0 = 0.1 - 3.t + 1.t^2$$

$$T(t^2) = 2t^2 + 0t + 0 = 0.1 + 0.t + 2.t^2$$

luego:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De aquí resulta que el polinomio característico de A, es $p(t) = (4 - t)(-3 - t)(2 - t)$. Así los valores propios de A y por consiguiente de T, son: $t_1 = 4$; $t_2 = -3$; $t_3 = 2$.

Determinemos ahora los vectores propios correspondientes a estos valores propios. Sea $\alpha = at^2 + bt + c$ el vector característico correspondiente al valor $t_1 = 4$,. Se tiene entonces: $T(\alpha) = 4\alpha$, o sea

$$T(at^2 + bt + c) = 4at^2 + 4bt + 4c$$

pero:

$$T(at^2 + bt + c) = (2a + b + c)t^2 + (2c - eb)t + 4c$$

De donde facilmente resulta: $a = (9c)/14$ y $b = (2c)/7$ y tomando por comodidad $c = 14$, queda: $a = 9$ y $b = 4$, asi $\alpha = 9t^2 + 4t + 14$.

De análoga manera se obtiene para $t_2 = -3$, el vector propio $\beta = -t^2 + t$ y para $t_3 = 2$, el vector propio $\gamma = t^2$.

<u>DEF</u> 9.11

Sea V espacio n-dimensional. Un $T \in Hom(V,V)$ es diagonalizable, sii existe una base $\{\alpha_j\}^n$, de V, tal que la matriz de T en $\{\alpha_j\}$ es matriz diagonal.

<u>TEOREMA</u> 9.23

Sea V espacio n-dimensional. El homomorfismo $T \in Hom(V,V)$ es diagonalizable sii V tiene una base formada por vectores propios de T.

Dm

Supongamos primero que T es diagonalizable, entonces existe una base $\{\alpha_j\}^n$, para V, tal que T se expresa por una matriz diagonal: $D = (a_1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_n)$. Llamando $\vec{X}_j$ el vector-coordenada de α_j en la base $\{\alpha_i\}^n$, tenemos:

$$D\vec{X}_j = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_j\ x_j$$

de donde: $T(\alpha_j) = a_j\ \alpha_j$, resultado que nos muestra que los vectores α_j de la base $\{\alpha_j\}^n$, son vectores propios de T.

Reciprocamente sea $\{\alpha_j\}^n$, una base para V formada por vectores propios de la transformación T. Considerando que $T(\alpha_j) = t_j\ \alpha_j$ tememos:

$$T(\alpha_1) = t_1\ \alpha_1 + 0\ \alpha_2 + 0\ \alpha_3 + \dots + 0\alpha_n$$

$$T(\alpha_2) = 0\ \alpha_1 + t_2\alpha_2 + 0\ \alpha_3 + \dots + 0\alpha_n$$

$$T(\alpha_3) = 0\ \alpha_1 + 0\ \alpha_2 + t_3\alpha_3 + \dots + 0\alpha_n$$

$$T(\alpha_n) = 0\ \alpha_1 + 0\ \alpha_2 + 0\ \alpha_3 + \dots + t_n\alpha_n$$

De donde resulta que T se expresa en la base $\{\alpha_j\}^n$, de vectores propios de T, por la matriz diagonal

$D = (t_1\ t_2\ t_3\ \dots\ t_n)$. Así T es diagonalizable.

Ejemplo 9.12

Sea T una transformación lineal de R^3 a R^3, definida por:

$$T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_3)$$

Determinar una base que la diagonalice.

Solución

Por el teorema precedente, la transformación T será diagonalizable sii, $V = R^3$ tiene una base formada por vectores propios de T. Buscaremos estos vectores característicos.

Tomando para $V = R^3$, la base usual $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, la transfomación T se expresa por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica correspondiente es: $(1-t)(1-t)(2-t) = 0$. De aquí se obtiene los valores propios: $t_1 = 1$; $t_2 = 1$ y $t_3 = 2$. Finalmente para $t_1 = t_2 = 1$, se obtiene los vectores propios: $\alpha_1 = (1,0,1)$ y $\alpha_2 = (0,1,0)$. Además para $t_3 = 2$, resulta $\alpha_3 = (1,1,0)$. Ahora como los vectores α_1, α_2 y α_3 son linealmente independientes, ellos constituyen una base para el espacio $V = R^3$, así entonces T es diagonalizable .

Vemos cual es la matriz de T en esta nueva base $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Tenemos:

$$T(\alpha_1) = T(1,0,1) = (1,0,1) = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3$$

$$T(\alpha_2) = T(0,1,0) = (0,1,0) = 0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3$$

$$T(\alpha_3) = T(1,1,0) = (2,2,0) = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3$$

De donde T resulta expresado por la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1.- Sea P^n el espacio de los polinomios de grado no superior a n. Determine cual de las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

a) $L : P^2 \rightarrow P^3$ con : $L(p(t)) = t^3\, p'(0) + t^2\, p(0)$

b) $S : P^1 \rightarrow P^2$ con : $S(p(t)) = t\, p(t) + p(0)$

c) $T : P^1 \rightarrow P^2$ con : $T(p(t)) = t\, p(t) + 1$

2.- La aplicación L a R a R está definida por $L(\alpha) = a\alpha+b$ con $a,b \in R$. Determine a y b para que L sea Lineal.

3.- Sea T una aplicación de R^2 a R^2, tal que a cada vector $\alpha \in R^2$ le asocia el vector $T(\alpha)$, simétrico de α respecto al eje OX. Demuestre que T es lineal y determine su matriz para la base usual.

4.- Sea T una aplicación lineal de R^2 a R^2, definida por:

$T(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2 , 2x_1 - x_2)$

Se considera en R^2 las bases $A = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(-1,2)\}, (2,0)$. Se pide matriz de T con respecto a las bases: A; A y B; B y A; B. Determine T(2,3) usando la definición de T y luego usando cada una de las matrices encontradas.

5.- Sea V el espacio generado por $A = \{1,t,e^t,te^t\}$. Se define la aplicación lineal T de V a V, por: $T(\alpha) = d\alpha/dt$. Determine la matriz de T con respecto a la base A.

6.- Sea I la transformación identidad de R^2 a R^2. Se considera en R^2 las bases $A = \{(1,0),(0,1)\}$ y B $\{(1,-1),(2,3)\}$. Determinar la expresión matricial de I, con respecto a las bases: A, A y B, B y A, B.

7.- Sea V el espacio de las funciones continuas generados por la base A = {sent, cost}. Se considera además la base B = {sent-cost, sent + cost} y la aplicación lineal T de V a V, definida por: T(f) = df/dt. Se pide expresión matricial de T con respecto a las bases: A; A y B; B y A; B.

8.- Sea L una aplicación lineal de R_2^2 a R_2^2 , siendo R_2^2 el espacio de la matriz de orden dos sobre R, definida por:

$$L(X) = AX - XA \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ \text{y} \ X \in R_2^2$$

Determine la expresión matricial de L con respecto a las bases: S ; S y T; T y S; T, siendo:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

9.- Se considera la aplicación lineal L de R^3 a R^3 definida por:

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determine su imagen y su núcleo. Una base para cada uno de estos espacios.

10.- Se considera la aplicaicón lineal T, de P^2 a R definida por:

$$T(at^2 + bt + c) = \int_0^1 (at^2 + bt + c)\,dt$$

Determine el núcleo de T y una base para dicho núcleo. ¿Cuál es la imagen de esta aplicación?

11.- Sea T una transformación lineal de P^2 a P^3, definida por $T(p(t)) = t^2\, p'(t)$. Determine una base para Ker(T) y una para Im(T).

12.- Determine una transformación lineal L de R^2 a R^3, tal que $\{(1,-1,2),(3,1,-1)\}$ sean base para Im(L).

13.- Sea L una aplicación lineal de R^3 a R, tal que: $L(1,1,1) = 3$, $L(0,1,1) = 2$ y $L(0,0,1) = 1$. Determine $L(a,b,c)$.

14.- Determine una transformación lineal T de R^2 a R^3, cuya imagen es generada por $\{(0,1,1),(0,1,-1)\}$.

15.- Sea T una aplicación lineal de R_2^2 a R_2^2 definida por:

$T(X) = AX - XA$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $X \in R_2^2$

Determine una base para el núcleo de T.

16.- Sean L, S y T homomorfismos de R^3 a R^2, definidos por:

$L(x,y,z) = (x + y + z,\ x + y)$

$S(x,y,z) = (zx + z,\ x + y)$

$T(x,y,z) = (zy, x)$

Demostrar que ellos son linealmente independientes.

17.- Sean S y T oporadores lineales en R^2, definidos por: $S(x,y) = (x,0)$ y $T(x,y) = (0,y)$. Determine: ST, TS, S^2 y T^2.

18.- Sea V espacio vectorial de dimensión finita y T un operador lineal en V, tal que: rango (T^2) = rang(T). Demuestre que: $(\mathrm{Ker}T) \cap (\mathrm{Im}T) = \{\theta\}$

19.- Sea T un operador lineal en R^2, definido por: $T(x,y,z) = (2x + 3y - z,\ 4x - y, 2x)$. Determine si T es invertible. En caso afirmativo encuentre la expresión

20.- Dada la aplicación lineal S de R^3 a R^3 por

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

determine si ella admite una inversa S^{-1}. En caso afirmativo, encuéntrela.

21.- Sea a un escalar no nulo. Demuestre que un homomorfismo T es singular si y solo si (aT) es singular.

22.- Sea L una transformación lineal de R^3 a R^3 definida por: $L(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + 3x_2, 4x_3 - x_2, 3x_3)$. Determine los valores y vectores propios de L.

23.- Sea T una aplicación lineal de R^2 a R^2, definida como rotación positiva en $(\pi/2)$ en torno al origen. Determine los valores y vectores propios de T.

24.- Sea $T \in Hom(R_2^2, R_2^2)$ representado en la base:

$$S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine sus valores y sus vectores característicos.

25.- Sea S un homomosfismo de P^2 a P^1 definido por $S(p(t)) = p'(t)$. Determine si S es diagonalizable o nó.

26.- Sea T un operador lineal en R^n tal que $T^2 = I$. Demuestre que T es diagonalizable y que sus valores propios son ± 1.

27.- Determine la naturaleza de las cuadricas

a) $13x^2 + 12y^2 + 10z^2 - 8xy + 4xz - 4yz = 12$

b) $5x^2 + 4xy + 4xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2 = 9$

c) $2x^2 + 2y^2 + 20z^2 + 2xy + 6xz + 6yz = 1$

28.- Sea P el espacio de los polinomios a coeficientes reales. Sea la aplicación lineal $T : P \rightarrow P$, definida por: $T(p(t)) = (t - a)(p'(t) + p'(a)) - 2(p(t) - p(a))$ Determinar: a) Núcleo y dimensión de T. b) Mostrar que sus valores propios son todos reales y enteros

29.- Sea V el espacio generado por los vectores: $\alpha_1 = e^{at}\operatorname{sen}bt$ y $\alpha_2 = e^{at}\cos bt$. Determine una matriz para el operador derivada D. Encuentre D^{-1} y mediante D^{-1}, calcule $\int e^{at} \operatorname{sen}bt\, dt$.

30.- Se considera el espacio euclídeo de las funciones: $p(t) = a + b\cos t + c\operatorname{sen}t$ con la norma $||p(t)|| = \sqrt{a^2 + (b^2 + c^2)/2}$. Se define la transformación lineal $T(p(t)) = p(t + m)$. Demuestre que T es ortogonal y calcule sus valores y vectores propios. (a,b,c y m son números reales).

B I B L I O G R A F I A

1) CULLEN CHARLES: "Matrices and Lineas Transformations". Addison Wesley - 1966

2) FINKBEINER, D.T. "Introduction to Matrices and Linear Transformations", Freeman, San Francisco - 1960

3) FRANKLIN, J.N., "Matrix Theory", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey - 1968

4) FRIEDMAN, B., "Principles and Techniques of Applied Mathematics", Wiley, New York - 1956

5) GANTMACHER, F.R., "The Theory of Matrices" Vol. I, Chelsea, New York - 1960

6) GERE, J.M., and WEAVER, Jr. W., "Matrix Algebra for Engineers", Van Nostrand, Princeton, New Jersey - 1965

7) LANCASTER, P., "Theory of Matrices", Academic Press, New York - 1969

8) PIPES, L.A., "Matrix Methods for Engineers", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey - 1963

9) SCHNEIDER, H. and BARKER, G.P., "Matrices and Linear Algebra", Holt, New York - 1968

10) STEIN, F.M., "Introduction to Matrices and Determinants", Wadsworth, Belmont, California - 1967

I N D I C E